ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd

Katedra matematiky

Cyklické vlastnosti orientovaných grafů

Bakalářská práce

Plzeň 2022

Kateřina Krejčíková

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
Fakulta aplikovaných věd
Akademický rok: 2021/2022

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE
(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení:	**Kateřina KREJČÍKOVÁ**
Osobní číslo:	**A19B0435P**
Studijní program:	**B0541A170007 Matematika a její aplikace**
Téma práce:	**Cyklické vlastnosti orientovaných grafů**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky**

Zásady pro vypracování

Na rozdíl od neorientovaných grafů jsou vlastnosti a struktura orientovaných grafů prozkoumané daleko méně. Řada relativně základních otázek je stále otevřená. Jedná se například o otázky související s hamiltonovskými vlastnostmi, existencí dlouhých cyklů a otázky pokrývání cykly (např. při stupňových postačujících podmínkách a dostatečně vysoké souvislosti). Cílem bakalářské práce je přehledné zpracování problematiky cyklických vlastností orientovaných grafů a práce na vybraném problému.

Rozsah bakalářské práce: **20-50 stran**
Rozsah grafických prací: **dle potřeby**
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

- G. Chartrand, L. Lesniak, P. Zhang: Graphs & Digraphs, Chapman and Hall/CRC, 2015
- J.L. Gross, J. Yellen, M. Anderson: Graph Theory and Its Applications, Chapman and Hall/CRC, 2018
- A. Bondy, U.S.R. Murty: Graph Theory, Springer-Verlag London, 2008
- J. Bang-Jensen, G.Z. Gutin: Digraphs: Theory, Algorithms and Applications, Springer-Verlag London, 2009

Časopisecká literatura bude upřesňována průběžně.

Vedoucí bakalářské práce: **Doc. Ing. Roman Čada, Ph.D.**
Katedra matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **1. října 2021**
Termín odevzdání bakalářské práce: **25. května 2022**

Západočeská univerzita v Plzni
L.S.
Fakulta aplikovaných věd

Doc. Ing. Miloš Železný, Ph.D.
děkan

Doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.
vedoucí katedry

V Plzni dne 1. října 2021

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a pramenů.

V .... dne ....

....

Kateřina Krejčíková

Poděkování

Ráda bych poděkovala Doc. Ing. Romanu Čadovi, Ph.D. za vedení této bakalářské práce, za cenné rady a především za trpělivost a ochotu, kterou mi při zpracování této práce věnoval.

Abstrakt

Tato práce se zabývá cyklickými vlastnostmi orientovaných grafů. První kapitola je seznámením s některými problémy v oblasti teorie grafů. Ve druhé kapitole definujeme základní pojmy z teorie grafů - nejprve pro neorientované a dále pro orientované grafy. Ve třetí kapitole jsou uvedeny známé věty a hypotézy o hamiltonovských vlastnostech neorientovaných i orientovaných grafů, které kladou podmínky zejména na stupně vrcholů daných grafů. Ve čtvrté kapitole jsou zmíněny postačující podmínky zaměřené na souvislost a nezávislost opět neorientovaných i orientovaných grafů. Poslední kapitola je věnována lokálním verzím Meynielovy věty a Manoussakisovy hypotézy, které popisují cykly na určitých množinách vrcholů.

Klíčová slova: Orientovaný graf, hamiltonovský cyklus, stupňové podmínky, lokální podmínky, souvislost grafu, nezávislost grafu

Abstract

This thesis is focused on Hamilton properties of directed graphs. The first chapter is a familiarization with some of the problems of graph theory. In the second chapter we define fundamental terms of graph theory for both undirected and directed graphs. In the third chapter we mention well-known theorems and conjectures about Hamilton properties of undirected and directed graphs which provide particularly sufficient degree conditions. In the fourth chapter we discuss sufficient conditions based on connectivity and independence of given graphs. The last chapter is dedicated to local versions of Meyniel's theorem and Manoussakis' conjecture which characterize cycles on specific sets of vertices.

Keywords: Directed graph, Hamilton cycle, degree conditions, local conditions, connectivity, independence

Obsah

1 Úvod

Teorie grafů patří spíše k novějším oblastem matematiky. Za jejího zakladatele se považuje švýcarský matematik Leonhard Euler, který v roce 1736 publikoval první článek v historii teorie grafů, v němž řešil „problém sedmi mostů města Královce“. Úlohou bylo nalézt ve městě cestu, kterou by bylo možné přejít přes každý most právě jednou. Euler v článku ukázal, že nalézt takovou cestu možné není. V teorii grafů lze rozlišit dvě základní oblasti, kterými jsou grafy neorientované a grafy orientované. Obě zmíněné kategorie mají širokou oblast použití pro řešení problémů v mnoha vědních disciplínách, jimiž jsou například biologie, fyzika, informatika nebo kybernetika. Známým problémem v neorientovaných grafech je například již zmíněný problém sedmi mostů města Královce nebo problém obchodního cestujícího, který odpovídá hledání hamiltonovské kružnice v neorientovaném grafu. V orientovaných grafech bychom za úlohu obdobnou Eulerovu problému sedmi mostů města Královce mohli považovat například známou úlohu, kterou v roce 1893 v rámci své práce publikoval Georges Édouard Auguste Brunel:

Mějme plnou nádobu vody o objemu 8 litrů a dvě prázdné nádoby s objemy 5 a 3 litry. Jakým způsobem musíme přelévat vodu tak, abychom nakonec dostali dvakrát 4 litry?

Tuto úlohu lze modifikovat na úlohy, ve kterých můžeme mít různý počet lahví o různých objemech, a každou lze reprezentovat orientovaným grafem. Podrobnější historický přehled lze nalézt v [33]. Dále se v oblasti orientovaných grafů jedná například o problémy týkající se toků v sítích. Pojem toků se zde používá pro mnoho druhů konkrétních příkladů, mezi něž patří mimo jiné dopravní toky, toky v elektrických obvodech nebo cirkulace v oběhové soustavě člověka. Všechny výše uvedené problémy zkoumají cyklické vlastnosti grafů, které modelují příslušný reálný systém.

2 Základní pojmy

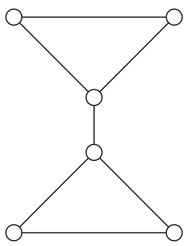
2.1 Neorientované grafy

Nechť V je konečná množina. Dvojici $G = (V, E)$, kde E je množina dvouprvkových podmnožin množiny V, nazveme neorientovaným grafem. Prvky množiny V nazýváme vrcholy a prvky E nazýváme hrany. Neuspořádaná dvojice $\{u, v\}$, kde $u, v \in V$, představuje hranu mezi vrcholy u a v. Množiny vrcholů a hran neorientovaného grafu G, budeme dále značit jako $V(G)$ a $E(G)$. Mějme grafy G a G'. Řekneme, že graf G' je podgrafem grafu G, jestliže $V(G') \subseteq V(G)$ a $E(G') \subseteq E(G)$.

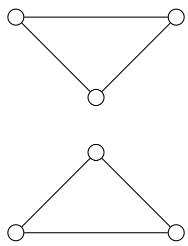
Řekneme, že vrcholy $u, v \in V(G)$ jsou sousední, jestliže $\{u, v\} \in E(G)$. Pro každý vrchol $u \in V(G)$ definujeme jeho stupeň jako $d(u) = |\{v \in V(G) : \{u, v\} \in E(G)\}|$. Okolím vrcholu $u \in V(G)$ nazveme množinu $N(u) = \{v \in V(G) : \{u, v\} \in E(G)\}$. Řádem grafu G nazveme číslo $n = |V(G)|$, zatímco číslo $m = |E(G)|$ nazýváme velikostí grafu G.

Posloupnost vrcholů $v_1, v_2, \dots, v_k$ takovou, že $\forall i = 1, 2, \dots, k - 1$ platí $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$, nazveme sledem v grafu G. Tah v grafu G je sled, ve kterém se neopakují hrany. Cestou v grafu G mezi dvěma vrcholy u a v nazveme sled $u = v_1, v_2, \dots, v_k = v$ takový, že $v_i \neq v_j \; \forall i \neq j$. Jestliže navíc $k = |V(G)|$, pak je tato cesta hamiltonovská.

Graf G je souvislý, pokud pro každé dva vrcholy $u, v \in V(G)$ existuje v G sled mezi u a v. V opačném případě je graf G nesouvislý. Každý maximální souvislý podgraf grafu G nazýváme jeho komponentou. Příklady souvislých a nesouvislých grafů jsou znázorněny na obrázcích 2.1 a 2.2.



Obrázek 2.1: Souvislý graf



Obrázek 2.2: Nesouvislý graf

Řekneme, že graf G je k-souvislý, jestliže pro každou dvojici vrcholů $u, v \in V(G)$ existuje k vrcholově disjunktních cest mezi u a v. Největší číslo k takové, že G je k-souvislý pak nazveme souvislostí grafu G. Alternativně lze tuto vlastnost díky Mengerově větě [24] definovat pomocí vrcholového řezu. Vrcholový řez grafu G je množina vrcholů $U \subseteq V(G)$ taková, že graf $G' = (V(G) \setminus U, E(G))$ není souvislý. Vrcholovou souvislostí (dále jen „souvislostí“) $\kappa(G)$ grafu G pak nazveme mohutnost minimálního vrcholového řezu grafu G.

Graf G je hamiltonovsky souvislý, jestliže mezi každými dvěma vrcholy $u, v \in V(G)$ existuje v G hamiltonovská cesta.

Uzavřený sled v grafu G je posloupnost vrcholů $v_1, v_2, \ldots, v_k$ taková, že $\forall i = 1, 2, \ldots, k-1$ platí $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$ a zároveň $v_1 = v_k$. Uzavřený tah v grafu G je tah $v_1, v_2, \ldots, v_k$, pro který platí $v_1 = v_k$. Kružnicí v grafu G nazveme cestu $v_1, v_2, \ldots, v_k$ takovou, že $v_1 = v_k$. Jestliže $k = |V(G)|$, pak je tato kružnice hamiltonovská. Graf obsahující alespoň jednu hamiltonovskou kružnici nazýváme hamiltonovským grafem. Poznamenejme, že je-li graf hamiltonovsky souvislý, pak je hamiltonovský a je-li graf hamiltonovský, pak obsahuje hamiltonovskou cestu. Cestou a kružnicí v grafu G budeme dále rovněž označovat příslušné podgrafy grafu G.

Řekneme, že graf G je úplný, jestliže pro každé dva vrcholy $u, v \in V(G)$ platí, že $\{u, v\} \in E(G)$. Dále řekneme, že graf G je bipartitní, jestliže lze množinu $V(G)$ rozdělit na dvě disjunktní podmnožiny $A, B \subseteq V(G)$ takové, že $\forall u, v \in A$ a $\forall w, z \in B$ platí $\{u, v\}, \{w, z\} \notin E(G)$. Množiny A a B nazýváme partitními množinami. Pokud navíc $\forall u \in A$ a $\forall v \in B$ platí, že $\{u, v\} \in E(G)$, potom G nazveme úplným bipartitním grafem a značíme jej $K_{m,n}$, kde m, n značí počet vrcholů jednotlivých partitních množin.

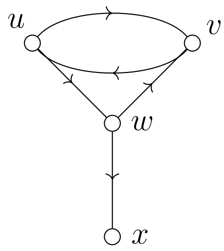
Jestliže $u, v \in V(G)$ je dvojice nesousedních vrcholů neorientovaného grafu G, potom $G + \{u, v\}$ označuje graf G', pro který platí $V(G') = V(G)$ a $E(G') = E(G) \cup \{u, v\}$.

2.2 Orientované grafy

Nechť V je konečná množina. Dvojici $G = (V, E)$, kde E je podmnožina kartézského součinu $V \times V$, nazveme orientovaným grafem. Prvky V nazýváme vrcholy a prvky E nazýváme orientované hrany. Uspořádaná dvojice (u, v), $u, v \in V$, představuje orientovanou hranu z vrcholu u do vrcholu v. Množiny vrcholů a hran orientovaného grafu G budeme dále značit jako $V(G)$ a $E(G)$. Řekneme, že vrcholy $u, v \in V(G)$ jsou sousední, jestliže $(u, v) \in E(G)$ nebo $(v, u) \in E(G)$. V této práci se zabýváme pouze jednoduchými orientovanými grafy. Neuvažujeme tedy grafy s násobnými orientovanými hranami a grafy se smyčkami, tj. hranami typu (v, v), kde $v \in V(G)$. Protichůdné hrany ale připouštíme.

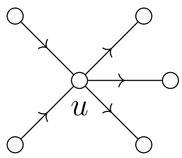
Orientovaný graf s množinou vrcholů $V(G) = \{u, v, w, x\}$ a množinou orientovaných hran $E(G) = \{(u, v), (v, u), (u, w), (w, v), (w, x)\}$ je znázorněn na obrázku 2.3.

Podobně jako u neorientovaných grafů i zde číslo $n = |V(G)|$ nazýváme řádem orientovaného grafu G a číslo $m = |E(G)|$ jeho velikostí. Pro vrchol $u \in G$ definujeme jeho výstupní stupeň jako $d^+(u) = |\{v \in G : (u, v) \in E(G)\}|$ a jeho vstupní



Obrázek 2.3: Orientovaný graf

stupeň jako $d^-(u) = |\{v \in G : (v,u) \in E(G)\}|$. Stupněm vrcholu $u \in G$ potom nazveme číslo $d(u) = d^+(u) + d^-(u)$. Pro orientovaný graf znázorněný na obrázku 2.4 platí $d^+(u) = 3$, $d^-(u) = 2$ a $d(u) = 5$. Pro vrchol u definujeme jeho výstupní okolí jako množinu $N^+(u) = \{v \in G : (u,v) \in E(G)\}$ a jeho vstupní okolí jako množinu $N^-(u) = \{v \in G : (v,u) \in E(G)\}$.

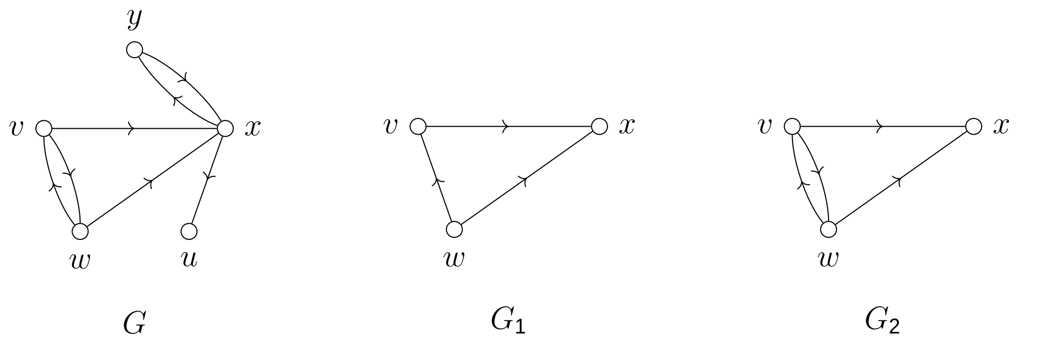


Obrázek 2.4: Výstupní a vstupní stupeň vrcholu u

Orientovaný sled v orientovaném grafu je posloupnost vrcholů $v_1, v_2, \dots, v_k$ taková, že pro každé $i = 1, 2, \dots, k-1$ platí, že v G existuje orientovaná hrana (v_i, v_{i+1}) vedoucí z vrcholu v_i do vrcholu v_{i+1}. Orientovaný tah v orientovaném grafu je orientovaný sled, ve kterém se neopakují hrany. Pokud posloupnost $v_1, v_2, \dots, v_k$ je sled v orientovaném grafu G a navíc platí $v_i \neq v_j \ \forall i \neq j$, nazveme tuto posloupnost orientovanou cestou. Cyklus v orientovaném grafu G je orientovaná cesta $v_1, v_2, \dots, v_k$ taková, že $v_1 = v_k$. Počet hran, které daný cyklus, resp. orientovaná cesta obsahuje, nazýváme délkou cyklu, resp. orientované cesty.

Pro každý orientovaný graf G existuje neorientovaný graf G', který nazveme symetrizací G, a pro který platí $V(G') = V(G)$ a zároveň $\forall u, v \in V(G) : (u,v) \in E(G) \Rightarrow \{u,v\} \in E(G')$. Řekneme, že orientovaný graf G je slabě souvislý, jestliže symetrizace G je souvislý graf. Dále řekneme, že orientovaný graf G je silně souvislý, jestliže pro každou dvojici vrcholů $u, v \in V(G)$ existuje orientovaný sled z u do v. Orientovaný graf G je silně k-souvislý, jestliže pro každou dvojici vrcholů $u, v \in V(G)$ existuje k vrcholově disjunktních cest z u do v. Největší číslo k takové, že G je silně k-souvislý pak nazveme souvislostí grafu G. Orientovaný graf G řádu n nazveme hamiltonovským, jestliže v G existuje cyklus délky n. Tento cyklus nazýváme hamiltonovským cyklem.

Mějme orientovaný graf $G = (V(G), E(G))$. Orientovaný graf G', pro nějž platí $V(G') \subseteq V(G)$ a $E(G') \subseteq E(G)$, nazveme orientovaným podgrafem grafu G. Dále mějme množinu $S \subseteq V(G)$. Řekneme, že podgraf G' grafu G je indukovaný množinou S, jestliže $V(G') = S$ a pro množinu hran $E(G') \subseteq E(G)$ platí $(u, v) \in E(G') \iff (u, v) \in E(G)$, kde $u, v \in S$. Na obrázku 2.5 je znázorněn orientovaný graf G, jeho podgraf G_1 a podgraf G_2 indukovaný množinou $S = \{v, w, x\}$.



Obrázek 2.5: Orientovaný graf G, jeho podgraf G_1 a indukovaný podgraf G_2

3 Stupňové podmínky

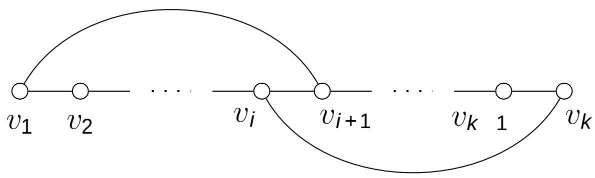
V této kapitole jsou uvedeny známé výsledky týkající se existence hamiltonovských cest a hamiltonovských kružnic nejprve v neorientovaných grafech a dále i hamiltonovských cest a hamiltonovských cyklů v orientovaných grafech. Jsou zde zmíněny převážně postačující podmínky, které pracují se stupni vrcholů daných grafů. Při zpracování této kapitoly byly použity podklady [2], [7], [10], [15] a [20].

3.1 Neorientované grafy

Zaměřme se tedy nejprve na neorientované grafy a jejich cyklické vlastnosti. V roce 1952 dokázal G. A. Dirac [16] jednu ze základních vět, která poskytuje postačující podmínku pro existenci hamiltonovské kružnice v grafu.

Věta 3.1.1 (Dirac [16]). *Nechť G je graf řádu n, kde $n \geq 3$. Jestliže $\forall u \in V(G)$ platí, že $d(u) \geq n/2$, potom G je hamiltonovský.*

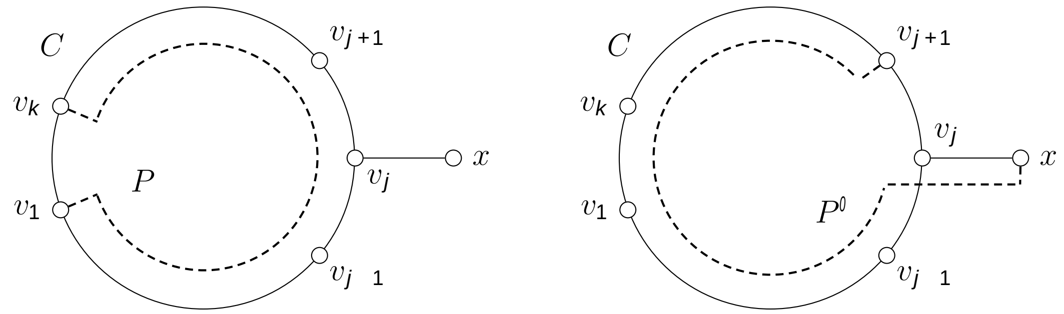
Důkaz. Nejprve ukážeme, že G je souvislý. Sporem předpokládejme, že $\forall u \in V(G)$: $d(u) \geq n/2$ a zároveň G není souvislý. G se tedy skládá z $k \geq 2$ komponent. Jednotlivé komponenty postupně označme $G_1, G_2, \ldots, G_k$ tak, aby $|V(G_1)| \leq |V(G_2)| \leq \ldots \leq |V(G_k)|$. Zřejmě platí $|V(G_1)| \leq \frac{n}{2}$ a tedy $\forall u \in V(G_1)$: $d(u) \leq \frac{n}{2} - 1$, což je spor s předpokladem, že každý vrchol v G má stupeň alespoň $d(u) \geq n/2$.
Dále nechť $P = v_1, v_2, \ldots, v_k$ je nejdelší cestou grafu G. Kdyby existoval vrchol $x \in V(G) \setminus V(P)$ takový, že $\{x, v_1\} \in E(G)$ nebo $\{v_k, x\} \in E(G)$, dostali bychom spor s předpokladem, že P je nejdelší cestou v G. Lze tedy předpokládat, že všechny vrcholy sousedící s v_1 nebo v_k leží na cestě P. Vzhledem k tomu, že P má méně než n hran a každý z vrcholů v_1 a v_k sousedí alespoň s $n/2$ vrcholy na P, existuje hrana $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(P)$ taková, že v_i je sousedním vrcholem v_k a v_{i+1} je sousedním vrcholem v_1 (viz obr. 3.1).



Obrázek 3.1: Situace z důkazu Diracovy věty

Posloupnost vrcholů $C = v_1, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_k, v_i, v_{i-1}, \ldots, v_2, v_1$ potom tvoří kružnici v grafu G.

Ukážeme, že C je hamiltonovská. Sporem předpokládejme, že existuje vrchol $x \in V(G)$, který neleží na kružnici C. Díky souvislosti grafu G potom existuje j tak, že $1 \leq j \leq k$ a $\{v_j, x\} \in E(G)$.



Obrázek 3.2: Situace z důkazu Diracovy věty. Čárkovaně je naznačena možná struktura cest P a P'.

Cesta $P' = v_{j+1}, v_{j+2}, \ldots, v_k, v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j, x$ je delší než cesta P (viz obr. 3.2), čímž dostáváme spor. Kružnice C je tak hamiltonovskou kružnicí v grafu G. □

Diracova věta je přímým důsledkem následující Oreho věty.

Věta 3.1.2 (Ore [29]). *Nechť $G = (V(G), E(G))$ je neorientovaný graf řádu n, kde $n \geq 3$, takový, že pro každou dvojici nesousedních vrcholů $u, v \in V(G)$ platí $d(u) + d(v) \geq n$, potom G je hamiltonovský.*

Pokud bychom v Oreho větě snížili požadavky na součet stupňů každých dvou nesousedních vrcholů na $d(u) + d(v) \geq n - 1$, dostali bychom postačující podmínku pro existenci hamiltonovské cesty v grafu G.

Věta 3.1.3 (Bondy, Chvátal [6]). *Nechť $G = (V(G), E(G))$ je neorientovaný graf řádu n, kde $n \geq 3$, takový, že pro každou dvojici nesousedních vrcholů $u, v \in V(G)$ platí $d(u) + d(v) \geq n - 1$, potom G obsahuje hamiltonovskou cestu.*

Naopak kdyby pro stupně každých dvou nesousedních vrcholů $u, v \in V(G)$ platilo $d(u) + d(v) \geq n + 1$, dostali bychom postačující podmínku pro hamiltonovskou souvislost grafu G.

Věta 3.1.4 (Bondy, Chvátal [6]). *Nechť $G = (V(G), E(G))$ je neorientovaný graf řádu n, kde $n \geq 3$, takový, že pro každou dvojici nesousedních vrcholů $u, v \in V(G)$ platí $d(u) + d(v) \geq n + 1$, potom G je hamiltonovsky souvislý.*

Výsledky následujících vět poskytují postačující podmínky pro existenci hamiltonovské kružnice v grafu založené na posloupnosti stupňů jeho vrcholů. Věta, kterou v roce 1962 dokázal L. Pósa [30], na rozdíl od vět 3.1.1 a 3.1.2 umožňuje některým vrcholům v daném grafu mít nízký stupeň.

Věta 3.1.5 (Pósa [30]). *Nechť G je graf řádu n 3 a nechť d_1 d_2 d_n je posloupnost stupňů vrcholů G. Jestliže d_i $i + 1$ pro všechna $i < (n$ $1)/2$ a navíc $d_{dn=2e}$ $dn/2e$ pro liché n, potom G je hamiltonovský.*

Chvátalova věta zobecňuje výsledky Pósovy věty tím, že popisuje všechny posloupnosti stupňů, které zajišťují existenci hamiltonovské kružnice v daném grafu.

Věta 3.1.6 (Chvátal [11]). *Nechť G je graf řádu n 3 a nechť d_1 d_2 d_n je posloupnost stupňů vrcholů G. Jestliže d_i $i + 1$ nebo $d_{n\ \ i}$ n i pro všechna $i < n/2$, potom G je hamiltonovský.*

Následující věta poskytuje postačující podmínku pro hamiltonovskost grafu G za slabších předpokladů než jakých využívá Chvátalova věta.

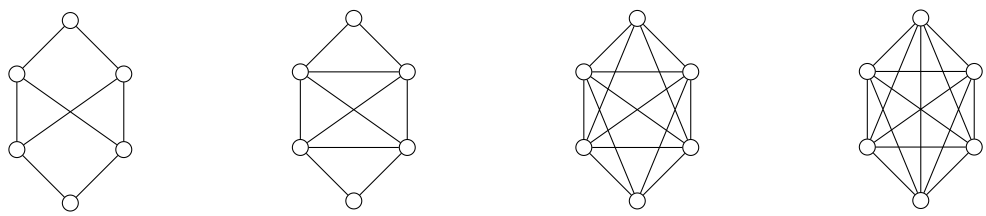
Věta 3.1.7 (Las Vergnas [21]). *Nechť G je graf řádu n 3. Jestliže existuje posloupnost vrcholů $v_1, v_2, \ldots, v_n$ taková, že v G neexistuje dvojice nesousedních vrcholů v_i, v_j 2 $V(G)$ splňující podmínky $i < j$, $d(v_i)$ i, $d(v_j)$ j 1, $d(v_i) + d(v_j)$ n 1 a $i + j$ n, potom G je hamiltonovský.*

Následující lemma uvádíme za účelem jeho využití při zavedení pojmu Bondy-Chvátalova uzávěru.

Lemma 3.1.8 (Ore [29]). *Nechť G je graf řádu n a nechť u, v 2 $V(G)$ jsou dva nesousední vrcholy, které splňují podmínku $d(u) + d(v)$ n. Potom G + fu, vg je hamiltonovský právě tehdy, když G je hamiltonovský.*

Definice 3.1.9. Nechť G je graf řádu n. Bondy-Chvátalův uzávěr $CL(G)$ grafu G je graf získaný opakovaným přidáváním hran mezi vrcholy splňující podmínku $d(u) + d(v)$ n, fu, vg 2 $E(G)$. Stupně se uvažují vždy v aktuálním grafu.

Na obrázku 3.3 je znázorněna konstrukce Bondy-Chvátalova uzávěru grafu G.



G $CL(G)$

Obrázek 3.3: Konstrukce Bondy-Chvátalova uzávěru grafu G

Záměna pořadí, v jakém jsou hrany do grafu přidávány v rámci konstrukce Bondy-Chvátalova uzávěru, nemá vliv na výsledný graf $CL(G)$.

Lemma 3.1.10 (Bondy, Chvátal [6]). *Bondy-Chvátalův uzávěr $CL(G)$ grafu G je určen jednoznačně.*

Opakováním procesu popsaného v rámci lemmatu 3.1.8 lze dojít k následujícímu tvrzení.

Lemma 3.1.11 (Bondy, Chvátal [6]). *Graf G je hamiltonovský právě tehdy, když $CL(G)$ je hamiltonovský.*

Zřejmě každý úplný graf na alespoň 3 vrcholech obsahuje hamiltonovskou kružnici, díky čemuž dostáváme následující postačující podmínku pro existenci hamiltonovské kružnice v grafu.

Věta 3.1.12 (Bondy, Chvátal [6]). *Nechť G je graf řádu $n \geq 3$. Jestliže $CL(G)$ je úplný graf, potom G je hamiltonovský.*

Každá z vět 3.1.1 – 3.1.7, která poskytuje postačující podmínku pro hamiltonovskost grafu, zároveň implikuje, že uzávěr $CL(G)$ daného grafu G je úplný graf [22].

3.2 Orientované grafy

Nyní uveďme známé postačující podmínky pro existenci hamiltonovských cest a hamiltonovských cyklů v orientovaných grafech. Jednu ze základních vět dokázal v roce 1960 A. Ghouila-Houri. Tato věta je ve své podstatě v orientovaných grafech obdobou Diracovy věty o stupních vrcholů v neorientovaných grafech.

Věta 3.2.1 (Ghouila-Houri [17]). *Je-li G silně souvislý orientovaný graf řádu n takový, že $d(v) \geq n$ pro každý vrchol $v \in V(G)$, potom G je hamiltonovský.*

Douglas R. Woodall dále dokázal následující větu, která poskytuje lepší výsledky než věta 3.2.1. Zároveň lze tuto větu v orientovaných grafech opět považovat za určitou obdobu Oreho věty.

Věta 3.2.2 (Woodall [34]). *Nechť G je orientovaný graf řádu n. Jestliže $d^+(u) + d^-(v) \geq n$ $\forall (u,v) \notin E(G)$, potom G je hamiltonovský.*

Z této věty plyne následující důsledek.

Důsledek 3.2.3. *Je-li G orientovaný graf řádu n takový, že $d^+(v) \geq n/2$ a $d^-(v) \geq n/2$ pro každý vrchol $v \in V(G)$, potom G je hamiltonovský.*

Y. Manoussakis dále dokázal větu, která zobecňuje výsledky vět 3.2.1 a 3.2.2.

Věta 3.2.4 (Manoussakis [23]). *Nechť G je silně souvislý orientovaný graf řádu n. Jestliže pro každou trojici vrcholů $u, v, w \in V(G)$, kde $(u, v) \notin E(G)$, platí*

$$d(u) + d(v) + d^+(u) + d^-(w) \geq 3n - 2 \text{ (}pokud\ (u, w) \notin E(G)\text{)},$$

$$d(u) + d(v) + d^+(w) + d^-(u) \geq 3n - 2 \text{ (}pokud\ (w, u) \notin E(G)\text{)},$$

potom G je hamiltonovský.

Jestliže $v \in V(G)$ a $S \subseteq V(G)$, zaveďme značení $E(v \to S)$ pro množinu hran vedoucích z v do S a množinu všech hran mezi v a S označme jako $E(v, S)$. Cestu P, jejíž počáteční i koncový vrchol leží na cyklu S budeme dále označovat jako S-cestu. Nyní uvedeme lemma, které se často využívá v důkazech vět o stupňových podmínkách pro orientované grafy.

Lemma 3.2.5 (Bondy, Thomassen [8]). *Nechť $P : v_1, v_2, \ldots, v_k$ je orientovaná cesta v orientovaném grafu G a nechť $v \in V(G) \setminus V(P)$. Jestliže v G neexistuje cesta z v_1 do v_k s množinou vrcholů $V(P) \cup \{v\}$, potom $|E(v, V(P))| \leq k + 1$.*

Důkaz. Zřejmě $\forall i = 1, 2, \ldots, k - 1$ platí

$$|E(v_i \to \{v\})| + |E(v \to \{v_{i+1}\})| \leq 1.$$

Odtud potom:

$$|E(v, V(P))| \leq 2 + \sum_{i=1}^{k-1} |E(v_i \to \{v\})| + |E(v \to \{v_{i+1}\})| \leq 2 + \sum_{i=1}^{k-1} 1 \leq 2 + k - 1,$$

tedy $|E(v, V(P))| \leq k + 1$. □

Následující věta, kterou v roce 1973 dokázal M. Meyniel, je opět zobecněním vět 3.2.1 a 3.2.2.

Věta 3.2.6 (Meyniel [25]). *Nechť G je silně souvislý orientovaný graf řádu n. Pokud pro každou dvojici nesousedních vrcholů u, v platí $d(u) + d(v) \geq 2n - 1$, potom G je hamiltonovský.*

Meynielova věta je přímým důsledkem následující věty, kterou dokázali J. A. Bondy a C. Thomassen [8].

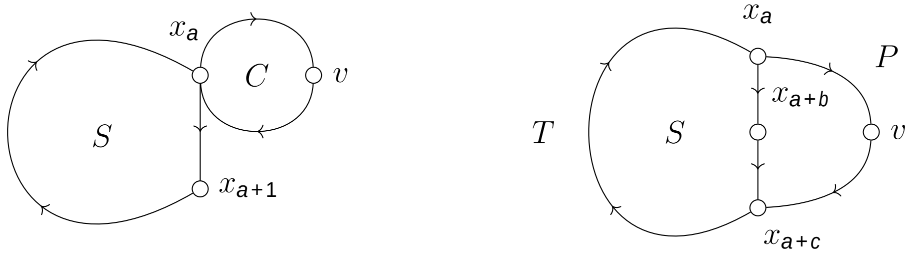
Věta 3.2.7. *Nechť G je silně souvislý orientovaný graf, který neobsahuje hamiltonovský cyklus a nechť $S = x_1, x_2, \ldots, x_m, x_1$ je nejdelší cyklus v G. Potom v G existuje vrchol $v \notin S$ a čísla $a, b \in \mathbb{Z}$ ($1 \leq a \leq m$, $1 \leq b < m$) tak, že platí:*

1. $(x_a, v) \in E(G)$,
2. v *nesousedí s žádným vrcholem* x_{a+i} *pro* $1 \leq i \leq b$,
3. $d(v) + d(x_{a+b}) \leq 2n - 1 - b$.

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že v orientovaném grafu G neexistuje žádná S-cesta. Víme, že G je silně souvislý a zároveň, že $V(S) \subsetneq V(G)$, z čehož plyne, že v G existuje cyklus C mající právě jeden společný vrchol s S. Označme tento vrchol x_a a jeho následníka na cyklu C označme v. Pokud by v G existovala cesta mezi v a x_{a+1}, pak by došlo ke sporu s předpokladem, že žádná cesta nemá počátek i konec na cyklu S. Odtud dostaneme, že $|E(y, \{v\})| + |E(y, \{x_{a+1}\})| \leq 2$ pro všechna $y \in V(G) \setminus (V(S) \cup \{v\})$. Potom pro dvojici nesousedních vrcholů v a x_{a+1} platí

$$d(v) + d(x_{a+1}) \leq 2 + 2(n - m - 1) + 2(m - 1) = 2n - 2$$

a věta je tímto dokázána pro $b = 1$.



Obrázek 3.4: Situace z důkazu Meynielovy věty

Dále předpokládejme, že v orientovaném grafu G existuje S-cesta. Nechť P je S-cesta mezi vrcholy x_a, $x_{a+c} \in V(S)$ taková, že c je minimální a zároveň $c > 1$ (jinak by došlo k prodloužení S). Následníka vrcholu x_a na cestě P označme v. Dále označme T cestu z x_{a+c} do x_a takovou, že $E(T) \subseteq E(S)$. Pro T platí $|V(T)| = m - c + 1$. Z předpokladu, že S je nejdelším cyklem v G plyne, že neexistuje cesta z x_{a+c} do x_a s množinou vrcholů $V(T) \cup \{v\}$. Použitím lemmatu 3.2.5 dostaneme $|E(v, V(T))| \leq m - c + 2$. Z minimality c dále plyne, že $E(v, \{x_{a+i}\}) = \emptyset$ pro $i = 1, \ldots, c - 1$.

Nechť b, $1 \leq b < c$, je největší celé číslo takové, že v G existuje cesta R z x_{a+c} do x_a s množinou vrcholů $V(S) \setminus \{x_{a+b}, \ldots, x_{a+c-1}\}$. Pro $b = 1$ je $R = T$. Z maximality b plyne, že v G opět neexistuje cesta z x_{a+c} do x_a s množinou vrcholů $V(R) \cup \{x_{a+b}\}$.

Potom x_{a+b} sousedí s nejvýše $m - c + b + 1$ vrcholy cesty R. Pokud by v G existovala cesta mezi vrcholy v a x_{a+b}, pak by došlo ke sporu s předpokladem, že c je minimální. Odtud opět dostáváme, že $|E(y,\{v\})| + |E(y,\{x_{a+b}\})| \leq 2$ pro všechna $y \in V(G) \setminus (V(S) \cup \{v\})$. Dále x_{a+b} sousedí s nejvýše $2(c - b - 1)$ vrcholy $V(S) \setminus V(R)$. Sečtením všech těchto omezení na stupně vrcholů v a x_{a+b} dostaneme požadovaný výsledek

$$d(v) + d(x_{a+b}) \leq 2(n - m - 1) + m - c + 2 + m - c + b + 1 + 2(c - b - 1) = 2n - b - 1.$$

□

Je třeba říci, že výsledek Meynielovy věty je nejlepší možný. Příklad potvrzující tuto skutečnost uvedeme dále po zavedení symetrické orientace úplného grafu, neboť právě tohoto pojmu při konstrukci zmíněného příkladu využijeme.

V roce 1992 navrhoval Manoussakis [23] následující hypotézu, která v určitém smyslu navazuje na větu 3.2.4.

Hypotéza 3.2.8 (Manoussakis [23]). *Nechť G je silně 2-souvislý orientovaný graf řádu n. Jestliže pro každé dvě různé dvojice nesousedních vrcholů x,y a w,z platí, že $d(x) + d(y) + d(w) + d(z) \geq 4n - 3$, potom G je hamiltonovský.*

Manoussakisova hypotéza 3.2.8 byla v roce 2020 dokázána S. Darbinyanem.

Věta 3.2.9 (Darbinyan [13]). *Nechť G je silně 2-souvislý orientovaný graf řádu n. Jestliže pro každé dvě různé dvojice nesousedních vrcholů x,y a w,z platí, že $d(x) + d(y) + d(w) + d(z) \geq 4n - 3$, potom G je hamiltonovský.*

Následujících pojmů využijeme v rámci konstrukce konkrétních příkladů, jež demonstrují, že výsledky vět 3.2.6 a 3.2.9 jsou nejlepší možné.

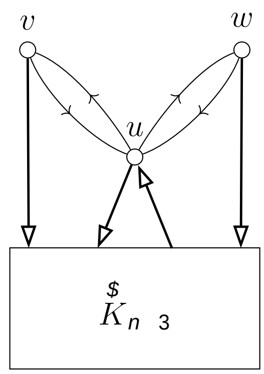
Definice 3.2.10. Nechť G je orientovaný graf a nechť $x, y \in V(G)$. Řekneme, že dvojice $\{x, y\}$ je dominovaná vrcholem $z \in V(G)$, jestliže $(z, x) \in E(G)$ a $(z, y) \in E(G)$. Podobně řekneme, že dvojice $\{x, y\}$ dominuje vrcholu $z \in V(G)$, jestliže $(x, z) \in E(G)$ a $(y, z) \in E(G)$.

Definice 3.2.11. Nechť G je neorientovaný graf. Orientovaný graf G' s množinou vrcholů $V(G') = V(G)$ a pro jehož množinu hran platí, že pokud $\{x, y\} \in E(G)$, potom právě jedna z hran $(x, y), (y, x)$ náleží $E(G')$, nazveme orientací neorientovaného grafu G.

Definice 3.2.12. Nechť G je neorientovaný graf. Orientovaný graf G', pro nějž platí $V(G') = V(G)$ a $\{x, y\} \in E(G) \iff \{(x, y), (y, x)\} \subseteq E(G')$, nazýváme symetrickou orientací grafu G.

Definice 3.2.13. Symetrickou orientaci úplného grafu nazveme úplným orientovaným grafem.

Úplný orientovaný graf na n vrcholech budeme dále značit jako $\overleftrightarrow{K}_n$.
Na následujícím příkladu (převzato z [2]) ukážeme, že výsledek Meynielovy věty je za splnění jejích předpokladů nejlepší možný. Uvažujme úplný orientovaný graf na $n-2$ vrcholech $\overleftrightarrow{K}_{n-2}$, kde $n \geq 5$. Dále v tomto grafu zvolme libovolně vrchol u. Sestrojme orientovaný graf H_n tak, že ke $\overleftrightarrow{K}_{n-2}$ přidáme dvojici vrcholů v, w, tedy $V(H_n) = V(\overleftrightarrow{K}_{n-2}) \cup \{v, w\}$. Zároveň platí, že vrcholy v a w dominují každému vrcholu orientovaného grafu $\overleftrightarrow{K}_{n-2}$ a jsou dominovány pouze vrcholem u, jak je znázorněno na obrázku 3.5. Orientovaný graf H_n je silně souvislý a neobsahuje hamiltonovský cyklus. Zároveň jedinou dvojici nesousedních vrcholů v H_n tvoří vrcholy v a w a součet jejich stupňů je $d(v) + d(w) = 2n - 2$.

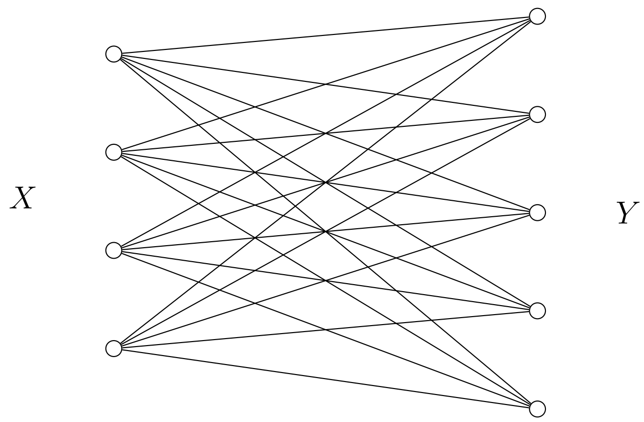


Obrázek 3.5: Vzniklý graf H_n

Ke konstrukci následujícího příkladu je nutno zavést pojem úplného bipartitního orientovaného grafu.

Definice 3.2.14. Úplný bipartitní orientovaný graf je symetrickou orientací úplného bipartitního neorientovaného grafu. Značíme jej $\overleftrightarrow{K}_{m,n}$, kde m, n značí počet vrcholů v jednotlivých partitních množinách.

V rámci [28] je uveden následující příklad, na základě kterého lze říci, že výsledek Manoussakisovy hypotézy 3.2.8 je nejlepší možný. Uvažujme úplný bipartitní orientovaný graf $G = \overleftrightarrow{K}_{\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}}$, kde $n \geq 9$ je liché. Nechť X, Y jsou jednotlivé partitní množiny grafu G takové, že $|X| = \frac{n-1}{2}$ a $|Y| = \frac{n+1}{2}$ (viz obr. 3.6). Součet stupňů každých 4 vrcholů v X je potom roven $4(n + 1)$ a součet stupňů každých 4 vrcholů v Y je roven $4(n - 1)$. Zřejmě tedy součet stupňů libovolných 4 nesousedních vrcholů v G je alespoň $4(n - 1)$ a přesto G není hamiltonovský.



Obrázek 3.6: Graf $G = \overset{\$}{K}_{\frac{n\ 1}{2},\frac{n+1}{2}}$, kde $n = 9$. Každá neorientovaná hrana zde představuje dvě protichůdné orientované hrany mezi týmiž vrcholy.

Zaměřme se nyní na postačující podmínky pro hamiltonovskost založené na dominanci vrcholů v orientovaných grafech. Vzhledem k podstatě dominance neexistují analogické verze těchto podmínek v oblasti neorientovaných grafů.

Věta 3.2.15 (Bang-Jensen, Gutin, Li [1]). *Nechť G je silně souvislý graf řádu n 2. Jestliže pro každou dominující dvojici nesousedních vrcholů fx, yg platí $d(x)$ n ^ $d(y)$ n 1 nebo $d(x)$ n 1 ^ $d(y)$ n, potom G je hamiltonovský.*

Věta 3.2.16 (Bang-Jensen, Gutin, Li [1]). *Nechť G je orientovaný graf řádu n. Jestliže G splňuje podmínku minf$d^+(x) + d\ (y), d\ (x) + d^+(y)$g n pro každou dominující dvojici nesousedních vrcholů fx, yg, potom G je hamiltonovský.*

Významnou část orientovaných grafů s širokou oblastí možných aplikací tvoří turnaje. V této práci sekci o turnajích uvádíme z důvodu jejich nezbytnosti při konstrukci příkladu, na kterém budeme demonstrovat, že výsledky vět 3.2.15 a 3.2.16 jsou nejlepší možné.

Definice 3.2.17. Orientaci úplného grafu nazýváme turnajem.

Definice 3.2.18. Řekneme, že turnaj T je tranzitivní, jestliže platí, že pokud (u, v) 2 $E(T)$ ^ (v, w) 2 $E(T)$, pak (u, w) 2 $E(T)$.

Dále uveďme několik vět, které poskytují postačující podmínky pro existenci hamiltonovských cest a hamiltonovských cyklů v turnajích. V důkazu následující věty 3.2.19 se využívá tzv. „vložitelnosti“ vrcholů do cest, která se dále objevuje v kapitole 5.

Věta 3.2.19 (Rédei [31]). *Každý turnaj obsahuje hamiltonovskou cestu.*

Důkaz. Nechť T je turnaj řádu n a nechť $P = x_1, x_2, \dots, x_k$ je nejdelší cesta v T. Sporem předpokládejme, že cesta P není hamiltonovská, tedy $k < n$. Potom existuje vrchol $v \in V(T)$, který neleží na cestě P. Jelikož T je turnaj, pak vrchol v určitě sousedí se všemi vrcholy cesty P. Kdyby v T existovaly hrany (v, x_1) nebo (x_k, v), pak bychom dostali spor s předpokladem, že P je nejdelší cestou v T. Předpokládejme tedy, že $(v, x_1), (x_k, v) \notin E(T)$. Odtud plyne, že $\{(x_1, v), (v, x_k)\} \subseteq E(T)$ a tedy existuje index i, $1 \leq i \leq k - 1$, takový, že (x_i, v) a (v, x_{i+1}) jsou hranami v turnaji T. Existence takovýchto dvou hran zaručuje, že vrchol v lze vložit do cesty P, tedy existuje cesta P' z x_1 do x_k s množinou vrcholů $V(P) \cup \{v\}$. Cesta P' je prodloužením cesty P, což je spor s předpokladem, že P je nejdelší cestou turnaje T. □

Důsledek 3.2.20. *Každý tranzitivní turnaj obsahuje právě jednu hamiltonovskou cestu.*

Předchozí důsledek je speciálním případem výsledku, že každý turnaj obsahuje lichý počet hamiltonovských cest, který dokázali Rédei [31] a Szele [32].

Zabývejme se dále existencí hamiltonovských cyklů v turnajích. Zřejmě platí, že pokud je turnaj hamiltonovský, pak je silně souvislý. V roce 1959 dokázal Paul Camion i opačné tvrzení.

Věta 3.2.21 (Camion [9]). *Turnaj T je hamiltonovský právě tehdy, když T je silně souvislý.*

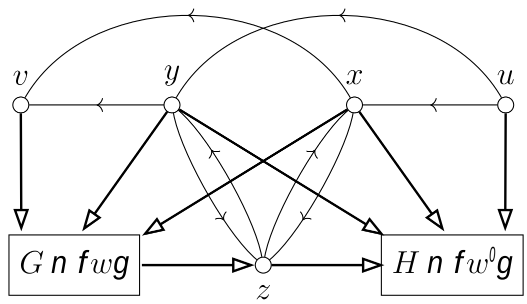
Definice 3.2.22. Cyklus C v orientovaném grafu G, pro který platí $|V(C)| = 3$, nazýváme trojúhelníkem grafu G.

Jestliže T je hamiltonovský turnaj, pak každý vrchol T leží na každém hamiltonovském cyklu turnaje T. Následující věta uvádí, že každý vrchol T je zároveň i vrcholem trojúhelníku turnaje T.

Věta 3.2.23. *Každý vrchol silně souvislého turnaje T řádu alespoň 3 je vrcholem trojúhelníku turnaje T.*

Uveďme nyní již zmiňovaný příklad, na kterém lze ukázat, že výsledek vět 3.2.15 a 3.2.16 je nejlepší možný. Nechť G a H jsou tranzitivní turnaje a platí $|V(G)| \geq 2$ a $|V(H)| \geq 2$. Označme $w \in V(G)$ vrchol, pro nějž platí $d^+(w) = 0$ a vrchol $w' \in V(H)$ vrchol, pro nějž platí $d^-(w') = 0$. Sestrojme nový orientovaný graf tak, že ztotožníme vrcholy w a w' do jednoho vrcholu z. K tomuto grafu přidejme 4 nové vrcholy x, y, u, v a hrany $\{(x,v),(y,v),(u,x),(u,y)\} \cup \{(x,z),(z,x),(y,z),(z,y)\} \cup \{(r,g) : r \in \{x,y,v\}, g \in V(G) \setminus \{w\}\} \cup \{(h,s) : h \in V(H) \setminus \{w'\}, s \in \{u,x,y\}\}$. Tento orientovaný graf (viz obr. 3.7) označme Q_n, kde n je řád Q_n. Zřejmě Q_n je silně souvislý a neobsahuje hamiltonovský cyklus. Zároveň $\{x, y\}$ představuje jedinou dominující dvojici nesousedních vrcholů v orientovaném grafu Q_n. Sečtením všech vstupních a výstupních stupňů vrcholů x a y dostaneme výsledek

$$d(x) = d(y) = d^+(x) + d^-(y) = d^-(x) + d^+(y) = n - 1.$$



Obrázek 3.7: Graf Q_n

Následující věta se v určitých aspektech podobá větám 3.2.6 a 3.2.16, ačkoli ani jedna z těchto vět není jejím důsledkem.

Věta 3.2.24 (Zhao, Meng [35]). *Nechť G je orientovaný graf řádu $n \geq 2$. Jestliže pro každou dvojici dominujících vrcholů $\{x, y\}$ a pro každou dvojici dominovaných vrcholů $\{u, v\}$ platí $d^+(x) + d^+(y) + d^-(u) + d^-(v) \geq 2n - 1$, potom G je hamiltonovský.*

O postačujících podmínkách, které pracují s posloupnostmi stupňů vrcholů daného grafu (jako u neorientovaných grafů například Pósova nebo Chvátalova věta), není v oblasti orientovaných grafů mnoho známo. Následující stále otevřená hypotéza z roku 1968 je analogií k Pósově větě.

Hypotéza 3.2.25 (Nash-Williams [26]). *Nechť G je orientovaný graf řádu $n \geq 3$ takový, že platí $d_i^+, d_i^- \geq i + 1$ pro každé $i < (n-1)/2$ a navíc $d^+_{\lceil n/2\rceil}, d^-_{\lceil n/2\rceil} \geq \lceil n/2 \rceil$ pro liché n. Potom G je hamiltonovský.*

Obecnější výsledky bychom opět dostali v rámci hypotézy, která je analogická s Chvátalovou větou 3.1.6.

Hypotéza 3.2.26 (Nash-Williams [27]). *Nechť G je silně souvislý orientovaný graf řádu n 3 a nechť d_1 d_2 d_n je posloupnost vstupních stupňů a d_1^+ d_2^+ d_n^+ posloupnost výstupních stupňů grafu G. Jestliže 8$i < n/2$ platí*

$$d_i^+ \quad i + 1 \text{ nebo } d_{n \ \ i} \quad n \quad i,$$

$$d_i \quad i + 1 \text{ nebo } d_{n \ \ i}^+ \quad n \quad i,$$

potom G je hamiltonovský.

4 Podmínky na souvislost a nezávislost

V této kapitole jsou uvedeny některé věty a hypotézy, které na rozdíl od vět uvedených v předchozí kapitole nekladou podmínky na stupně vrcholů grafu G, ale pracují s nezávislostí množin vrcholů grafu G a jeho souvislostí. Při zpracování této kapitoly byly použity podklady [20] a [10].

4.1 Neorientované grafy

Nejprve zavedeme pojem nezávislosti daného grafu.

Definice 4.1.1. Řekneme, že množina vrcholů $U \quad V(G)$ grafu G je nezávislá, jestliže žádné dva vrcholy U nejsou sousední. Nejvyšší počet vrcholů, které se mohou nacházet v nezávislé množině grafu G, nazýváme nezávislost grafu G a značíme jej $\alpha(G)$.

V. Chvátal a P. Erdős v roce 1972 dokázali, že je-li G graf řádu $n \quad 3$, jehož souvislost je větší nebo rovna jeho nezávislosti, potom G je hamiltonovský.

Věta 4.1.2 (Chvátal, Erdős [12]). *Nechť G je graf řádu $n \quad 3$ se souvislostí $\kappa(G)$ a nezávislostí $\alpha(G)$. Jestliže $\kappa(G) \quad \alpha(G)$, potom G je hamiltonovský.*

Opět platí, že pokud bychom v Chvátal-Erdősově větě požadovali pouze souvislost $\kappa(G) \quad \alpha(G) \quad 1$, dostali bychom postačující podmínku pro existenci hamiltonovské cesty v grafu G.

Věta 4.1.3. [12] *Nechť G je graf řádu $n \quad 3$ se souvislostí $\kappa(G)$ a nezávislostí $\alpha(G)$. Jestliže $\kappa(G) \quad \alpha(G) \quad 1$, potom v G existuje hamiltonovská cesta.*

Stejně tak $\kappa(G) \quad \alpha(G) + 1$ je postačující podmínkou pro hamiltonovskou souvislost grafu G.

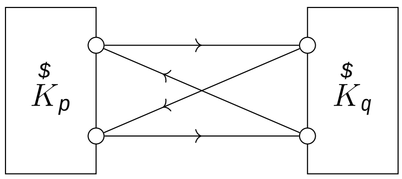
Věta 4.1.4. [12] *Nechť G je graf řádu $n \quad 3$ se souvislostí $\kappa(G)$ a nezávislostí $\alpha(G)$. Jestliže $\kappa(G) \quad \alpha(G) + 1$, potom G je hamiltonovsky souvislý.*

4.2 Orientované grafy

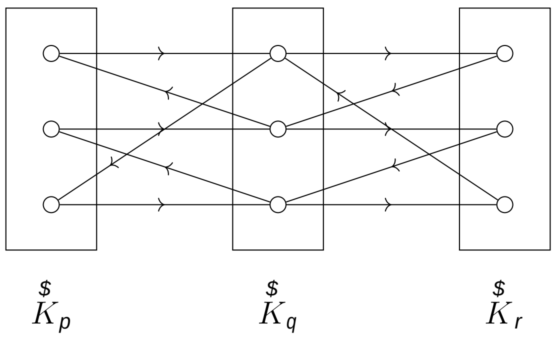
Zaměřme se nyní i u orientovaných grafů na stejný druh postačujících podmínek, jaký pro hamiltonovské neorientované grafy poskytuje Chvátal-Erdősova věta (věta 4.1.2). V oblasti orientovaných grafů momentálně neexistuje obdoba této věty. Souvislostí $\kappa(G)$ zde míníme silnou vrcholovou souvislost grafu G. Označme $\alpha_0(G)$ počet prvků největší množiny $S \subseteq V(G)$ takové, že žádné dva vrcholy $u, v \in S$ nejsou sousední. Dále označme $\alpha_2(G)$ velikost největší množiny $S \subseteq V(G)$ takové, že podgraf indukovaný množinou S neobsahuje cyklus délky 2. Pro $\alpha_0(G)$ je otázka nalezení postačující podmínky založené na souvislosti $\kappa(G)$ grafu G a jeho nezávislosti $\alpha_0(G)$ stále otevřená. Pro $\alpha_2(G)$ již tato podmínka nalezena byla, dokázal ji v roce 1987 B. Jackson [19].

Věta 4.2.1 (Jackson [19]). *Nechť G je orientovaný graf souvislosti $\kappa(G)$. Jestliže platí $\kappa(G) \geq 2^{\alpha_2(G)}(\alpha_2(G) + 2)!$, potom G je hamiltonovský.*

Pro neorientované grafy je podle Chvátal-Erdősovy věty postačující podmínkou hamiltonovskosti $\kappa(G) \geq \alpha(G)$. V rámci [5] mínil J. A. Bondy rozšířit tento výsledek i na orientované grafy a navrhl odhad na postačující podmínku pro existenci hamiltonovského cyklu v silně $\kappa(G)$-souvislém orientovaném grafu ve tvaru $\kappa(G) \geq \alpha_2(G)$. Nicméně pro $\kappa(G) = \alpha_2(G) = 2$ a $\kappa(G) = \alpha_2(G) = 3$ existuje nekonečně mnoho grafů, které tuto hypotézu vyvracejí (viz obr. 4.1 a 4.2 - převzato z [18]). Pro $\kappa(G) \geq \alpha_2(G) \geq 4$ je tato otázka ovšem otevřená.



Obrázek 4.1: Silně 2-souvislý orientovaný graf s nezávislostí $\alpha_2(G) = 2$, který není hamiltonovský.



Obrázek 4.2: Silně 3-souvislý orientovaný graf s nezávislostí $\alpha_2(G) = 3$, který není hamiltonovský.

V článku [20] je zmíněna následující hypotéza jakožto možná modifikace Bondyho [5] hypotézy, která navíc předpokládá souvislost a nezávislost daného orientovaného grafu alespoň 4.

Hypotéza 4.2.2. [20] *Nechť G je orientovaný graf se souvislostí $\kappa(G)$ a nezávislostí $\alpha_2(G)$. Jestliže platí $\kappa(G) \quad \alpha_2(G) \quad 4$, potom G je hamiltonovský.*

Obecně však není znám výsledek Bondyho [5] hypotézy o postačující podmínce pro hamiltonovskost „$\kappa(G) \quad \alpha_2(G)$" ani kdybychom zvýšili požadavky na souvislost daného orientovaného grafu na „$\kappa(G) \quad \alpha_2(G) + 1$".

Hypotéza 4.2.3 (Jackson, Ordaz [18]). *Nechť G je orientovaný graf se souvislostí $\kappa(G)$ a s nezávislostí $\alpha_2(G)$. Jestliže platí $\kappa(G) \quad \alpha_2(G) + 1$, potom G je hamiltonovský.*

5 Lokalizace stupňových podmínek

Tuto kapitolu věnujeme lokálním zobecněním známých stupňových podmínek. V první podkapitole uvedeme lokální verzi Meynielovy věty spolu se souvisejícími pojmy a ve druhé podkapitole se budeme detailněji zabývat analogickou lokalizací Manoussakisovy postačující podmínky na stupně vrcholů orientovaných grafů.

5.1 Meynielova podmínka

Nejprve zaveďme pojem Meynielovy množiny. Nechť $G = (V(G), E(G))$ je orientovaný graf řádu n. Množinu $M \subseteq V(G)$, kde pro každou dvojici nesousedních vrcholů $u, v \in M$ platí, že $d(u) + d(v) \geq 2n - 1$, nazveme Meynielovou množinou.

Následující věta lokálně zobecňuje výsledek věty 3.2.6 na libovolnou Meynielovu množinu.

Věta 5.1.1 (Berman, Liu [3]). *Nechť G je orientovaný graf řádu n. Jestliže G je silně souvislý, potom libovolná Meynielova množina M leží na orientovaném cyklu v grafu G.*

V důkazu předchozí věty 5.1.1 se často využívá zobecnění C-cesty (vzhledem k cyklu C) v orientovaném grafu. Zavádí se zde pojem tzv. C-tahu.

Definice 5.1.2. Nechť G je orientovaný graf a nechť C je jeho podgrafem. C-tahem v grafu G potom nazveme tah, jehož počáteční vrchol x i koncový vrchol y náleží množině $V(C)$, přičemž x a y mohou představovat tentýž vrchol.

5.2 Manoussakisova podmínka

Podobně jako předchozí větu 5.1.1, která lokálně využívá podmínky Meynielovy věty (věta 3.2.6), zobecníme v této práci i Manoussakisovu podmínku (věta 3.2.9).

Nechť $G = (V(G), E(G))$ je orientovaný graf řádu n. Množinu $M \subseteq V(G)$, kde pro každé dvě dvojice nesousedních vrcholů x, y a w, z, kde $x, y, w, z \in M$, platí, že $d(x) + d(y) + d(w) + d(z) \geq 4n - 3$, nazveme Manoussakisovou množinou. Dále řekneme, že množina $M \subseteq V(G)$ je silně 2-souvislá v orientovaném grafu G, jestliže v G existují alespoň 2 vrcholově disjunktní cesty z u do v a zároveň z v do u pro každé $u \neq v$, $u \in M$ a $v \in V(G)$.

Jestliže C je cyklus v G a $u, v \in V(C)$, zaveďme značení $C[u, v]$ pro část cyklu C z u do v vzhledem k orientaci C. Pro vrchol $u \in V(C)$ budeme dále značit jeho následníka, resp. předchůdce na cyklu C jako u^+, resp. u^-. Pro část cyklu C z u do v^-, resp. z u^+ do v vzhledem k orientaci C zaveďme značení $C[u, v)$, resp. $C(u, v]$.

Mějme orientovaný graf G. Pro $E(x, V(C))$, kde x je vrcholem grafu G a C jeho podgrafem, budeme dále používat značení $E(x, C)$ za účelem přehlednosti. Mějme orientovaný graf G a množinu $M \subseteq V(G)$. M-cyklem nazveme cyklus obsahující všechny vrcholy množiny M. M-největší cyklus je cyklus obsahující největší počet vrcholů množiny M a který je zároveň mezi všemi takovými cykly ten nejdelší.

Pro přehlednost zde nejprve uvedeme následující lemmata, kterých později využijeme v rámci důkazu věty 5.2.8.

Lemma 5.2.1 (O C-cestách, Bondy [4]). *Nechť G je silně 2-souvislý orientovaný graf. Dále nechť C je podgraf grafu G takový, že v G existuje alespoň jeden vrchol, který neleží v C. Potom v G existuje orientovaná C-cesta.*

Pozorování 5.2.2 (Darbinyan [14]). *Mějme orientovaný graf G řádu n a množinu $M \subseteq V(G)$. Jestliže M je Manoussakisova množina, pak v M existuje nejvýše jedna dvojice nesousedních vrcholů x, y, pro kterou platí $d(x) + d(y) \geq 2n - 2$.*

Důkaz. Předpokládejme, že v M existují alespoň dvě různé dvojice nesousedních vrcholů x_1, y_1 a x_2, y_2 splňující podmínku $d(x_1) + d(y_1) \geq 2n - 2$ a $d(x_2) + d(y_2) \geq 2n - 2$. Potom ale $d(x_1) + d(y_1) + d(x_2) + d(y_2) \geq 4n - 4$, což je spor s tím, že M je Manoussakisova množina. □

Lemma 5.2.3 (Berman, Liu [3]). *Nechť $G = (V(G), E(G))$ je orientovaný graf a $M \subseteq V(G)$ Meynielova množina. Potom pro každé dva vrcholy $u, v \in M$ existuje v G cesta z u do v nebo z v do u délky nejvýše 2.*

Nyní uvedeme lemma, které zobecňuje lemma o C-cestách.

Lemma 5.2.4. *Nechť G je orientovaný graf řádu n, C je cyklus v G a $M \subseteq V(G)$ silně 2-souvislá Manoussakisova množina.*

I. *Nechť $u \in V(C)$, $v \notin V(C)$, $u, v \in M$. Jestliže v G existuje cesta z v do u délky nejvýše 2 nebo cesta z u do v délky nejvýše 2, potom v G existuje C-cesta obsahující v nebo existuje cyklus C' obsahující v a mající s C společný pouze vrchol u.*

II. *Nechť $u, u' \in V(C)$, $u \neq u'$, $v \notin V(C)$ a $u, u', v \in M$. Jestliže v G existuje cesta z v do u nebo z u do v délky nejvýše 2 a zároveň cesta z v do u' nebo z u' do v délky nejvýše 2, potom v G existuje C-cesta obsahující vrchol v.*

Důkaz.

I. Předpokládejme, že existuje vrchol $b \notin V(C)$ tak, že $(u,b),(b,v) \in E(G)$. Jelikož M je silně 2-souvislá, existují dvě vrcholově disjunktní cesty Q_1, Q_2 z v do u. Jestliže alespoň jedna z nich neprochází ani v ani b, existuje v G C-cesta obsahující vrchol v. Zároveň nejvýše jedna z cest Q_1, Q_2 prochází vrcholem b. Nechť tedy $b \in V(Q_1)$. Potom u, b, v, Q_2, u tvoří cyklus C' obsahující vrchol v a mající s cyklem C společný pouze vrchol u.

II. Jestliže existuje $a \in V(C)$ tak, že $(a,v) \in E(G)$, resp. $(v,a) \in E(G)$, potom ze silné 2-souvislosti množiny M musí existovat orientovaná cesta z v na C, resp. z C do v. Tato cesta společně s hranou mezi vrcholy a a v tvoří C-cestu v G.

Dále ukážeme platnost tvrzení pro jednotlivé případy.

1. **Případ** V G existují cesty u, w, v a u', w', v.

   A) $w \neq w'$.

   Ze silné 2-souvislosti M v G existují dvě vrcholově disjunktní cesty Q_1, Q_2 z v do u. Nejvýše jedna z nich prochází vrcholem w a nejvýše jedna z nich prochází vrcholem w'.

   (a) Cesta Q_2 prochází oběma vrcholy w a w' a cesta Q_1 tedy naopak ani jedním z nich. Jestliže Q_2 prochází také vrcholem u', potom u', w', v, Q_1, u tvoří v G hledanou C-cestu. Jestliže Q_2 neprochází vrcholem u', potom vzhledem k orientaci Q_1 existuje první vrchol p takový, že $p \in V(C)$ a zároveň $p \in V(Q_1)$. Cesta u, w, v, Q_1, p, je potom hledanou C-cestou.

   (b) Cesta Q_2 prochází vrcholem w a neprochází vrcholem w'. Vrchol v nemá žádného vstupního ani výstupního souseda na C. Označme H množinu $V(G) \setminus (V(C) \cup \{v\})$. Předpokládejme, že v G neexistuje C-cesta obsahující vrchol v. Potom $|E(H \to u)| + |E(v \to H)| \leq n - |V(C)|$, jelikož v G neexistuje cesta v, x, u pro $x \neq w'$. Obdobně platí $|E(H \to u')| + |E(v \to H)| \leq n - |V(C)|$, jelikož v G neexistuje cesta v, x, u pro $x \neq w$. Dále platí

$$|E(u \to H)| + |E(H \to v)| \leq n - |V(C)|,$$

$$|E(u' \to H)| + |E(H \to v)| \leq n - |V(C)|,$$

$$|E(v \to V(C))| = |E(V(C) \to v)| = 0,$$

$$|E(u, V(C))| \le 2(|V(C)| - 1),$$

$$|E(u', V(C))| \le 2(|V(C)| - 1).$$

Sečtením těchto nerovností pro vrcholy u, u', v dostáváme

$$d(u) + d(v) \le 2n - 2,$$

$$d(u') + d(v) \le 2n - 2,$$

tj. celkem máme $2d(v) + d(u') + d(u) \le 4n - 4$, což je spor s předpokladem, že u, u', v náleží množině M.

(c) Cesta Q_2 neprochází ani vrcholem w ani vrcholem w'. Jestliže Q_2 prochází vrcholem u', potom u, w, v, Q_2, u' tvoří C-cestu v G. Pokud Q_2 neprochází vrcholem u', potom vzhledem k orientaci Q_2 existuje první vrchol p tak, že $p \in V(C)$ a zároveň $p \in V(Q_2)$. Cesta u', w', v, Q_2, p je potom hledanou C-cestou v G.

B) $w = w'$.

Cesta Q_2 prochází vrcholem $w = w'$ (vrchol $w = w'$ tedy neleží na Q_1). Označme p první vrchol cesty Q_1 na cyklu C. Jestliže $p = u$, potom u', w, v, Q_1, p tvoří C-cestu v G. Obdobně pokud $p = u'$, potom u, w, v, Q_1, p tvoří C-cestu v G. Pro $p \ne u, p \ne u'$ je například u, w, v, Q_1, p C-cestou v G.

Obdobným způsobem získáme C-cestu, pokud cesta Q_2 neprochází vrcholem $w = w'$.

2. **Případ** V G existují cesty v, w, u a v, w', u'.

C-cestu obdržíme analogickým způsobem jako v 1. případě.

3. **Případ** V G existují cesty u, w, v a v, w', u'.

(A) $w \ne w'$.

u, w, v, w', u' tvoří C-cestu v G.

(B) $w = w'$.

Nechť Q je cesta z u' do v. Označme H množinu $V(G) \setminus (V(C) \cup \{v\})$. Předpokládejme, že v G neexistuje C-cesta procházející vrcholem v. Odtud pak v G neexistují cesty v, x, u', $x \in V(G) \setminus \{w\}$ a u, y, v, $y \in V(G) \setminus \{w\}$. Potom platí

$$|E(u \to H)| + |E(H \to v)| \le n - |V(C)|,$$

$$|E(H \to u')| + |E(v \to H)| \le n - |V(C)|.$$

Dále platí

$$|E(H \to u)| + |E(v \to H)| \leq n - |V(C)|,$$

$$|E(u' \to H)| + |E(H \to v)| \leq n - |V(C)|,$$

$$|E(v \to V(C))| = |E(V(C) \to v)| = 0,$$

$$|E(u, V(C))| \leq 2(|V(C)| - 1),$$

$$|E(u', V(C))| \leq 2(|V(C)| - 1).$$

Sečtením těchto nerovností pro vrcholy u, u', v dostáváme

$$d(u) + d(v) \leq 2n - 2,$$

$$d(u') + d(v) \leq 2n - 2.$$

Celkem máme $d(u') + d(u) + 2d(v) \leq 4n - 4$, což je spor s předpokladem, že u, u', v náleží množině M.

□

Lemma 5.2.5 (Bondy, Thomassen [8]). *Nechť $P = v_1, v_2, \ldots, v_k$ je orientovaná cesta v orientovaném grafu G a nechť $v \in V(G) \setminus V(P)$. Jestliže v G neexistuje cesta z v_1 do v_k s množinou vrcholů $V(P) \cup \{v\}$, potom $|E(v, V(P))| \leq k + 1$.*

Lemma 5.2.6 (Ning [28]). *Nechť G je orientovaný graf řádu n, který není hamiltonovský. Dále nechť $C = x_1, x_2, \ldots, x_k$ je nejdelší cyklus grafu G, $P = x_p, y_1, y_2, \ldots, y_t, x_{p+\lambda}$ je C-cesta v G tak, že λ je minimální, $R = \{x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+\lambda-1}\}$ a $S = \{v \in R;\ v$ nelze vložit do $C[x_{p+\lambda}, x_p]\}$. Potom pro každé y_i, $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$, $s \in S$ platí $d(y_i) + d(s) \leq 2n - 2$.*

Důkaz. Z maximality C plyne, že y_i nelze vložit do $C[x_{p+\lambda}, x_p]$. Zároveň s též nelze vložit do $C[x_{p+\lambda}, x_p]$. Z lemmatu 5.2.5 máme

$$|E(y_i, C[x_{p+\lambda}, x_p])| \leq |V(C[x_{p+\lambda}, x_p])| + 1, \tag{1}$$

$$|E(s, C[x_{p+\lambda}, x_p])| \leq |V(C[x_{p+\lambda}, x_p])| + 1. \tag{2}$$

Jelikož P je takovou C-cestou v grafu G, že λ je minimální, y_i zřejmě nesousedí s žádným vrcholem $C[x_{p+1}, x_{p+\lambda-1}]$. Odtud potom

$$|E(y_i, C[x_{p+1}, x_{p+\lambda-1}])| = 0. \tag{3}$$

Dále pro $s \in S$ platí

$$|E(s, C[x_{p+1}, x_{p+\lambda-1}])| \leq 2(|V(C[x_{p+1}, x_{p+\lambda-1}])| - 1). \tag{4}$$

Označme $H \subseteq V(G)$ množinu $H = V(G) \setminus V(C)$. Z minimality λ v G neexistuje orientovaná cesta s, w, y_i ani y_i, w, s, kde $w \in H \setminus \{y_i\}$. Odtud máme

$$|E(s, H)| + |E(y_i, H)| \leq 2(|H| - 1). \tag{5}$$

Sečtením (1)–(5) dostáváme
$d(y_i) + d(s) = |E(y_i, C[x_{p+\lambda}, x_p])| + |E(y_i, C[x_{p+1}, x_{p+\lambda-1}])| + |E(s, C[x_{p+\lambda}, x_p])| + |E(s, C[x_{p+1}, x_{p+\lambda-1}])| + |E(s, H)| + |E(y_i, H)| \leq |V(C[x_{p+\lambda}, x_p])| + 1 + |V(C[x_{p+\lambda}, x_p])| + 1 + 2(|V(C[x_{p+1}, x_{p+\lambda-1}])| - 1) + 2(|H| - 1) = 2n - 2.$ □

Lemma 5.2.7 (Berman, Liu [3]). *Nechť P a Q jsou dvě vrcholově disjunktní cesty a nechť $K \subseteq V(P)$. Jestliže každý vrchol $z \in K$ lze vložit do Q, potom existuje cesta Q' se stejnými koncovými vrcholy jako Q taková, že $V(Q) \subseteq V(Q') \subseteq V(Q) \cup V(P)$ a zároveň $K \subseteq V(Q')$.*

Nyní uvedeme výše zmíněnou větu, kterou lokálně zobecníme výsledek věty 3.2.8 na libovolnou Manoussakisovu množinu.

Věta 5.2.8. *Nechť $G = (V(G), E(G))$ je orientovaný graf a nechť $M \subseteq V(G)$ je v G silně 2-souvislá Manoussakisova množina. Potom platí:*

1. *V G existuje cyklus C obsahující alespoň $|M| - 1$ vrcholů množiny M,*
2. *V G existuje orientovaná cesta obsahující všechny vrcholy množiny M.*

Důkaz. Předpokládejme, že v G neexistuje M-cyklus. Nechť $C = x_1, x_2, \ldots, x_k$ je cyklus obsahující největší počet vrcholů množiny M a nechť je mezi všemi takovými cykly ten nejdelší. Jelikož v G neexistuje M-cyklus, není C hamiltonovským cyklem v G a tedy $k \leq n - 1$ a $V(G) \setminus V(C) \neq \emptyset$. Nechť H je podgraf orientovaného grafu G indukovaný na množině $V(H) \subseteq V(G) \setminus V(C)$ a $V(H)$ obsahuje alespoň jeden vrchol množiny M. Dále označme R podgraf grafu G indukovaný množinou $V(G) \setminus (V(C) \cup V(H))$. Protože M je silně 2-souvislá, existuje v G orientovaná C-cesta vzhledem k H obsahující vrchol množiny M (lemma 5.2.4). Označme $P = x_p, y_1, y_2, \ldots, y_t, x_{p+\lambda}$ takovou C-cestu, že λ je minimální, $x_p, x_{p+\lambda} \in V(C)$, $y_1, y_2, \ldots, y_t \in V(H)$ a $t \geq 1$. Dále označme $S = \{v \in V(C[x_{p+1}, x_{p+\lambda-1}]) \cap M;\ v$ nelze vložit do $C[x_{p+\lambda}, x_p]\}$. Jelikož C je M-největší cyklus v G, je $S \neq \emptyset$, tj. v C existuje vrchol $u \in M$ tak, že u není vložitelný do $C[x_{p+\lambda}, x_p]$. Nechť $s \in S$ je libovolný vrchol. Z lemmatu 5.2.6 plyne

Tvrzení 1. $d(y_i) + d(s) \geq 2n - 2$ pro $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ taková, že $y_i \in M$.

Z předpokladů věty 5.2.8 plyne

Tvrzení 2. Pro libovolnou trojici různých vrcholů x, y, z takových, že x, y a x, z jsou dvě dvojice nesousedních vrcholů, platí $2d(x) + d(y) + d(z) \geq 4n - 3$.

Tvrzení 3. $S = \{s\}$, $|\{y_1, y_2, \dots, y_t\} \cap M| = 1$.

Důkaz. Předpokládejme, že $|S| \geq 2$ a $s, s' \in S$. Nechť $y \in \{y_1, y_2, \dots, y_t\} \cap M$. Podle tvrzení 1 platí $d(y) + d(s) \geq 2n - 2$ a $d(y) + d(s') \geq 2n - 2$. Z minimality λ jsou y, s a y, s' dvě dvojice nesousedních vrcholů. Dostáváme $2d(y) + d(s) + d(s') \geq 4n - 4$, což je spor s tvrzením 2. Proto $|S| = 1$.

Předpokládejme, že $|\{y_1, y_2, \dots, y_t\} \cap M| \geq 2$. Potom $\exists\, \alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, t\}$ tak, že $y_\alpha \neq y_\beta$ a $y_\alpha, y_\beta \in M$. Nechť $s \in S$. Podle tvrzení 1 platí $d(y_\alpha) + d(s) \geq 2n - 2$ a $d(y_\beta) + d(s) \geq 2n - 2$. Opět z minimality λ jsou y_α, s a y_β, s dvě dvojice nesousedních vrcholů. Dostáváme $2d(s) + d(y_\alpha) + d(y_\beta) \geq 4n - 4$, což je spor s tvrzením 2. Proto $|\{y_1, y_2, \dots, y_t\} \cap M| = 1$. □

Tvrzení 4. $V(R) \cap M = \emptyset$

Důkaz. Předpokládejme, že $V(R) \cap M \neq \emptyset$. Existuje tedy H' podgraf G indukovaný množinou $V(H') \subseteq V(R)$ tak, že $V(H') \cap M \neq \emptyset$. Z předpokladu věty 5.2.8 je množina M silně 2-souvislá. V G tedy existuje C-cesta vzhledem k H', která obsahuje alespoň 1 vrchol množiny M. Označme $P' = x_q, z_1, z_2, \dots, z_{t'}, x_{q+r}$ takovou C-cestu vzhledem k H', která obsahuje alespoň 1 vrchol množiny M a r je minimální, $x_q, x_{q+r} \in V(C)$, $\{z_1, z_2, \dots, z_{t'}\} \subseteq V(H')$, $\{z_1, z_2, \dots, z_{t'}\} \cap M \neq \emptyset$ a indexy uvažujeme modulo k, kde k je délka cyklu C. Kdyby bylo možné všechny vrcholy $V(C[x_{q+1}, x_{q+r-1}]) \cap M$ vložit do $C[x_{q+r}, x_q]$, pak by v G podle lemmatu 5.2.7 existoval cyklus C', který by obsahoval více vrcholů množiny M než C, což je spor s volbou C. V $C[x_{q+1}, x_{q+r-1}]$ tedy existuje alespoň jeden vrchol nevložitelný do $C[x_{q+r}, x_q]$. Označme tento vrchol s'. Podle lemmatu 5.2.6 je $d(z) + d(s') \geq 2n - 2$. Na základě volby H, H' je $z \neq y$ a navíc s, y a s', z jsou dvě různé dvojice nesousedních vrcholů množiny M. Sečtením dostáváme $d(y) + d(s) + d(z) + d(s') \geq 4n - 4$, což je spor s předpokladem, že M je Manoussakisova množina. Platí tedy $V(R) \cap M = \emptyset$. □

Tvrzení 5. $V(H) \cap M = \{y\}$

Důkaz. Sporem předpokládejme, že $V(H) \cap M \setminus \{y\} \neq \emptyset$. Uvažujme podgraf $G' = (V(G'), E(G'))$ orientovaného grafu G indukovaný na množině $V(G') = V(G) \setminus \{y\}$. Jelikož množina M je silně 2-souvislá v G, je M silně souvislá v G'. Nechť H' je podgraf H indukovaný množinou $V(H) \setminus \{y\}$, který obsahuje alespoň jeden vrchol

$y' \in M$. Vzhledem k silné souvislosti množiny M v orientovaném grafu G' mohou nastat dva případy:

1. v G' neexistuje C-cesta procházející vrcholem y', ale existuje cyklus C' procházející y' mající právě jeden vrchol x_i společný s cyklem C,

2. v G' existuje C-cesta procházející vrcholem y'.

Nejprve předpokládejme, že v G' neexistuje C-cesta procházející vrcholem y'. Potom v G' tedy existuje cyklus procházející y' mající právě jeden vrchol společný s cyklem C. Označme C' nejkratší mezi všemi takovými cykly. Nechť x_i^M je poslední vrchol z množiny M na C před vrcholem x_i (vzhledem k orientaci C). Dále označme x_i^+, resp. x_i^- následníka, resp. předchůdce vrcholu x_i na cyklu C'. Ukážeme, že $|E(x_i^M, G')| + |E(y', G')| \geq 2|V(G')| - 2$. Poznamenejme, že i v G' je C cyklus obsahující největší počet vrcholů množiny M. V G' tedy nemůže existovat cesta mezi vrcholy x_i^M a y', jinak bychom dostali spor s předpokladem, že v G' neexistuje C-cesta procházející vrcholem y'. Odtud dostáváme, že platí

$$|E(x_i^M, V(H') \setminus V(C'))| + |E(y', V(H') \setminus V(C'))| \geq 2|V(H') \setminus V(C')|.$$

Protože cyklus C' byl zvolen jako nejkratší, neexistují v G' hrany z v do y', kde $v \in C'[x_i^+, y'^-)$, ani hrany z y' do v, kde $v \in C'(y'^+, x_i^-]$. Protože y' leží na C', zřejmě $(y'^-, y'), (y', y'^+) \in E(G')$. Odtud plyne, že

$$|E(y', V(C') \setminus \{x_i\})| \geq |V(C') \setminus \{x_i\}| + 1.$$

Jelikož G' neobsahuje C-cestu procházející vrcholem y', nemohou v G' existovat hrany z x_i^M do v pro $v \in C'[x_i^+, y']$ ani hrany z v do x_i^M pro $v \in C'[y', x_i^-]$. Platí tedy

$$|E(x_i^M, V(C') \setminus \{x_i\})| \geq |V(C') \setminus \{x_i\}| - 1.$$

Označme $A \subseteq V(G)$ množinu $V(G') \setminus (V(C) \cup V(H'))$. Pro vrchol x_i^M platí $|E(x_i^M, A)| \geq 2|A|$ a pro vrchol y' máme $|E(y', A)| = 0$. Po sečtení předchozích podmínek tedy pro tyto vrcholy dostáváme

$$|E(x_i^M, V(G') \setminus V(C))| + |E(y', V(G') \setminus V(C))| \geq 2|V(G') \setminus V(C)| - 2.$$

Vrchol y' může na cyklu C sousedit pouze s vrcholem x_i, tedy $|E(y', C)| \leq 2$, jinak by v G' existovala C-cesta. Pro x_i^M je triviálně $|E(x_i^M, C)| \leq 2|V(C)| - 2$. Celkově tak máme

$$|E(x_i^M, G')| + |E(y', G')| \leq 2|V(G')| - 2.$$

Dále v G neexistuje cesta x_i^M, y, y', jinak by v G existoval cyklus obsahující více vrcholů množiny M než C. Platí tedy

$$|\{(x_i^M, y), (y, y')\} \cap E(G)| \leq 1.$$

Zároveň v G neexistuje cesta y', y, x_i^M, jinak by v G' existovala C-cesta (tvrzení 3). Opět tedy platí

$$|\{(y', y), (y, x_i^M)\} \cap E(G)| \leq 1.$$

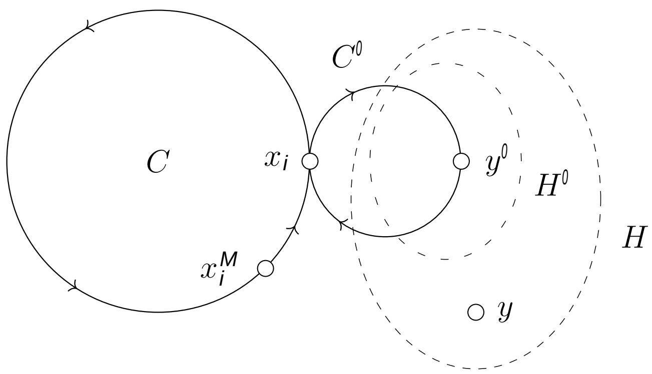
Celkem tedy máme

$$d(x_i^M) + d(y') = |E(x_i^M, G)| + |E(y', G)| \leq 2|V(G')| - 2 + 2 = 2n - 2.$$

Z tvrzení 1 máme $d(s) + d(y) \leq 2n - 2$. Vzhledem k tomu, že vrcholy y a y' jsou různé, platí potom

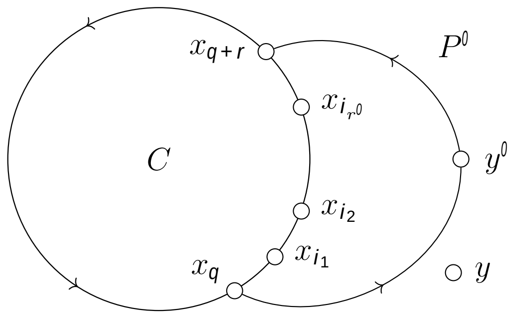
$$d(s) + d(y) + d(x_i^M) + d(y') \leq 4n - 4,$$

což je spor s předpokladem dokazované věty 5.2.8.



Obrázek 5.1: Situace z důkazu tvrzení 5

Nyní předpokládejme, že v G' existuje C-cesta procházející vrcholem y'. Nechť tedy $P' = x_q, z_1, z_2, \ldots, z_r, x_{q+r}$ je C-cesta taková, že r je minimální, kde $x_q, x_{q+r} \in V(C)$, $y' \in M \cap \{z_1, z_2, \ldots, z_r\}$. Pokud lze každý vrchol z $M \cap V(C[x_{q+1}, x_{q+r-1}])$ vložit do $C[x_{q+r}, x_q]$, potom z lemmatu 5.2.7 plyne, že existuje orientovaná cesta P_2 z x_{q+r} do x_q taková, že $V(P_2) = V(C)$. Potom ovšem na cyklu $C' = P_2[x_{q+r}, x_q]P'$ leží více vrcholů množiny M než na cyklu C, což je spor s volbou C. Existuje tedy alespoň jeden vrchol $M \cap V(C[x_{q+1}, x_{q+r-1}])$, který nelze vložit do $C[x_{q+r}, x_q]$. Označme takovéto vrcholy $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{r'}}$. Z lemmatu 5.2.5 pak $\forall j \in \{1, 2, \ldots, r'\}$ platí $|E(x_{i_j}, G')| + |E(y', G')| \leq 2|V(G')| - 2$.



Obrázek 5.2: Situace z důkazu tvrzení 5

Uvažujme nyní vrchol x_{i_1}. Pokud v G neexistuje cesta x_{i_1}, y, y' ani y', y, x_{i_1}, tj. současně platí $|\{(x_{i_1}, y), (y, y')\} \cap E(G)| \leq 1$ a $|\{(y', y), (y, x_{i_1})\} \cap E(G)| \leq 1$, potom $d(x_{i_1}) + d(y') \leq 2|V(G)| - 2 = 2n - 2$. Protože vrcholy y a y' jsou různé, platí $d(s) + d(y) + d(x_{i_1}) + d(y') \leq 4n - 4$, což je spor s předpokladem dokazované věty 5.2.8. Pokud je $\{(y', y), (y, x_{i_1})\} \subseteq E(G)$, pak lze každý vrchol z $C[x_q^+, x_{i_1}]$ vložit do $C[x_{q+r}, x_q]$. Označme $C'[x_{q+r}, x_q]$ cestu získanou vložením všech vrcholů $C[x_q^+, x_{i_1}]$ do $C[x_{q+r}, x_q]$. Potom $C' = P'[x_q, y'], y, C[x_{i_1}, x_{q+r}], C[x_{q+r}^+, x_q]$ tvoří cyklus v G obsahující více vrcholů množiny M než cyklus C, což je spor. Tím dostáváme $\{(x_{i_1}, y), (y, y')\} \subseteq E(G)$.
Pro vrchol x_{i_2} lze odvodit spor obdobným způsobem. Pokud v G neexistuje cesta x_{i_2}, y, y' ani y', y, x_{i_2}, potom $d(s) + d(y) + d(x_{i_2}) + d(y') \leq 4n - 4$, což je opět spor s předpokladem dokazované věty 5.2.8. Pokud je $\{(y', y), (y, x_{i_2})\} \subseteq E(G)$, pak lze každý vrchol z $C[x_{i_1}^+, x_{i_2}]$ vložit do $C[x_{q+r}, x_q]$. Označme $C'''[x_{q+r}, x_q]$ cestu získanou vložením všech vrcholů $C[x_{i_1}^+, x_{i_2}]$ do $C[x_{q+r}, x_q]$. Potom $C'' = C[x_q, x_{i_1}], y, C[x_{i_2}, x_{q+r}], C'''[x_{q+r}, x_q]$ tvoří cyklus v G obsahující více vrcholů množiny M než cyklus C, což je spor. Odtud $\{(x_{i_2}, y), (y, y')\} \subseteq E(G)$.
Podobně odvodíme, že $\forall j \in \{1, 2, \ldots, r'\}$ platí, že $\{(x_{i_j}, y), (y, y')\} \subseteq E(G)$. Uvažujme tedy vrchol $x_{i_{r'}}$. Víme, že $\{(x_{i_{r'}}, y), (y, y')\} \subseteq E(G)$. Jelikož každý vrchol ležící na $C[x_{i_{r'}}^+, x_{q+r}]$ lze vložit do $C[x_{q+r}, x_q]$, existuje opět cyklus v G obsahu-

jící více vrcholů množiny M než cyklus C a tím dostaneme spor. Platí tedy, že $V(H) \setminus M = \{y\}$. □

Z tvrzení 5 plyne, že délka cyklu C je $|M| - 1$. Druhá část věty 5.2.8 je důsledkem její první části, kterou jsme právě dokázali. Nechť C je cyklus v G délky $|M| - 1$. Označme $v \in M$ vrchol, který na C neleží. Protože M je silně 2-souvislá, existuje v G cesta P vedoucí z u do v, kde $u \in V(C)$. Označme u^+ následníka vrcholu u na cyklu C. Cesta $C[u^+, u], P, v$ pak obsahuje všechny vrcholy množiny M a důkaz věty 5.2.8 je hotov. □

6 Závěr

Cílem této práce bylo seznámení s problematikou cyklických vlastností orientovaných grafů. Nejprve jsme uvedli některé praktické problémy teorie grafů a definovali základní pojmy z této oblasti.

Dále v práci následovala třetí kapitola, která se zabývala postačujícími stupňovými podmínkami pro hamiltonovskost grafů - nejprve neorientovaných, dále orientovaných. Zde jsme uvedli několik známých výsledků, kterými jsou například Diracova věta nebo Oreho věta, jež pracují přímo se stupni daných vrcholů, nebo Pósova a Chvátalova věta, které se zaměřují na posloupnosti stupňů vrcholů daných grafů. V podkapitole o orientovaných grafech jsme opět uvedli některé známé stupňové postačující podmínky pro hamiltonovskost grafu a porovnali jsme je s jejich alternativními verzemi o neorientovaných grafech. Zde se objevila řada doposud nevyřešených problémů, neboť otázka existence hamiltonovských cyklů je v oblasti orientovaných grafů značně komplikovanější. V rámci této kapitoly jsme zároveň uvedli několik známých výsledků k postačujícím podmínkám pro existenci hamiltonovských cest a hamiltonovských cyklů v turnajích.

Ve čtvrté kapitole jsme se soustředili na postačující podmínky na souvislost a nezávislost daných grafů. Opět jsme nejprve uvedli známou Chvátal-Erdősovu větu, která poskytuje postačující podmínku pro hamiltonovskost neorientovaného grafu, a následně jsme opět zmínili obdobné výsledky pro orientované grafy, zde prozatím převážně formou hypotéz.

V poslední části této práce jsme se zabývali lokálními verzemi stupňových postačujících podmínek, zejména pak Meynielovy věty a Manoussakisovy hypotézy. Opět jsme nejprve uvedli výsledek od autorů [3], týkající se lokalizace Meynielovy podmínky a následně jsme naformulovali a dokázali větu 5.2.8, která analogicky lokalizuje Manoussakisovu stupňovou podmínku.

Reference

[1] J. Bang-Jensen, G. Gutin, and H. Li. Sufficient conditions for a digraph to be Hamiltonian. *J. Graph Theory*, 22 (1996), 181–187.

[2] J. Bang-Jensen, G.Z. Gutin, *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*, Springer-Verlag London (2009)

[3] K.A. Berman and X. Liu, Cycles through large degree vertices in digraphs: a generalization of Meyniel's theorem, *J. Combin. Theory Ser. B* 74 (1998), 20–27.

[4] J. A. Bondy, Basic graph theory: paths and circuits, *Handbook of combinatorics*, Elsevier, Amsterdam, (1995).

[5] J.A. Bondy, Hamilton cycles in graphs and digraphs, Research Report Dept. Comb. Opt., University of Waterloo, (1975).

[6] J.A. Bondy, V. Chvátal, A method in graph theory. *Discrete Math*. 15 (1976), 111–136.

[7] J.A. Bondy, U.S.R Murty, *Graph Theory*, Springer-Verlag London, (2008)

[8] J.A. Bondy and C. Thomassen, A short proof of Meyniel's theorem, *Discrete Math.* 19 (1977), 195–197.

[9] P. Camion, Chemins et circuits hamiltoniens des graphes complets. *C. R. Acad. Sci. Paris* 249 (1959), 2151–2152.

[10] G. Chartrand, L. Lesniak, P. Zhang, *Graphs and Digraphs*, Chapman and Hall/CRC (2015)

[11] V. Chvátal, On Hamilton's ideals, *J. Combin. Theory* 12 (1972), 163–168.

[12] V. Chvátal, P. Erdős, A note on hamiltonian circuits. *Discrete Math*. 2 (1972), 111–113.

[13] S. Darbinyan, A new sufficient condition for a Digraph to be Hamiltonian - a proof of Manoussakis Conjecture, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 22 (2020).

[14] S. Darbinyan, On the Manoussakis Conjecture for a Digraph to be Hamiltonian, *Mathematical Problems of Computer Science* 51 (2019), 21–38.

[15] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer-Verlag, Heidelberg (2017)

[16] G.A. Dirac, Some theorems on abstract graphs. *Proc. London Math. Soc.* 2 (1952), 69–81.

[17] A. Ghouila-Houri, Une condition suffisante d'existence d'un circuit hamiltonien, *CR Acad. Sci. Paris* 25 (1960), 495–497.

[18] B. Jackson, O. Ordaz, Chvátal–Erdős conditions for paths and cycles in graphs and digraphs–a survey, *Discrete Math.* 84 (1990), 241–254.

[19] B. Jackson, A Chvátal–Erdős condition for Hamilton cycles in digraphs, *J. Combin. Theory* 43 (1987), 245–252.

[20] D. Kühn, D. Osthus, A survey on Hamilton cycles in directed graphs, *European Journal of Combinatorics* 33 (2012), 750–766.

[21] M. Las Vergnas, Thesis, L'Université de Paris VI (1972).

[22] L. Lesniak, Some recent results in hamiltonian graphs. *J. Graph Theory* 1 (1977), 27–36.

[23] Y. Manoussakis, Directed hamiltonian graphs, *J. Graph Theory* 16 (1992), 51–59.

[24] K. Menger, Zur allgemeinen Kurventheorie. *Fund. Math.* 10 (1927), 95–115.

[25] M. Meyniel, Une condition suffisante d'existence d'un circuit hamiltonien dans un graphe oriente, *J. Combin. Theory Ser.* 14 (1973), 137–147.

[26] C.St.J.A. Nash-Williams, Hamilton circuits in graphs and digraphs, in: The Many Facets of Graph Theory, in: Springer Verlag Lecture Notes, vol. 110, Springer Verlag, (1968), 237–243.

[27] C.St.J.A. Nash-Williams, Hamiltonian circuits, Stud. Math. 12 (1975), 301–360.

[28] B. Ning, Notes on a conjecture of Manoussakis concerning Hamilton cycles in digraphs, *Inf. Process. Lett.* 115 (2015), 221–224

[29] O. Ore, Note on Hamilton circuits. *Amer. Math. Monthly* 67 (1960), 55.

[30] L. Pósa, A theorem concerning Hamiltonian lines, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Kozl.* 7 (1962), 225–226.

[31] L. Rédei, Ein kombinatorischer Satz. *Acta Litt. Szeged* 7 (1934), 39–43.

[32] T. Szele, Kombinatorische Untersuchungen über gerichtete vollständige Graphen. *Mat. Fiz. Lapok* 50 (1943), 223–256.

[33] P. Šišma, Teorie grafů, 1736–1963. Prometheus, (1997).

[34] D.R. Woodall, Sufficient conditions for cycles in digraphs, *Proc. London Math. Soc.* 24 (1972), 739–755.

[35] L.-C. Zhao and J.-H. Meng, A sufficient condition for hamiltonian cycles in digraphs. *Ars Combin.*, 32 (1991), 335–338.