Problém čtyř barev ve výuce matematiky na střední škole

Milena Šebková

Katedra matematiky FAV ZČU
301 00 Plzeň, Technická 8
sebkova@kma.zcu.cz

Abstrakt. Každý dobrý učitel často přemýšlí, čím zaujmout své studenty, jak je nadchnout pro svůj předmět. Ze svých studentských let i z praxe vysokoškolského pedagoga vím, že jednou ze zajímavých částí matematiky, která toto dokáže, je teorie grafů. V příspěvku se kromě obecných námětů pro začlenění do výuky zaměříme na jeden konkrétní problém, a to problém čtyř barev, který lze snadno formulovat i pro laika. Zajímavá a poučná je i historie důkazu tohoto problému.

1 Úvod

Teorie grafů je matematický obor zahrnovaný do diskrétní matematiky. Je jednou z oblastí, kterou současné české středoškolské kurikulum neobsahuje, byť se jedná o moderní část matematiky úzce související s využíváním výpočetní techniky. Navíc teorie grafů nabízí řešení řady problémů z praxe. Jedná se tak o ideální část matematiky, kde lze naplnit vše, co se požaduje v charakteristice vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace, jak uvádí *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia* [1, str. 22]: „Během studia žáci objevují, že matematika nachází uplatnění v mnoha oborech lidské činnosti (např. v ekonomii, technice, ale i ve společenských vědách), že je ovlivňována vnějšími podněty (například z oblasti přírodních věd) a že moderní technologie jsou užitečným pomocníkem matematiky. Žáci poznávají, že matematika je součástí naší kultury a je výsledkem složitého multikulturního historického vývoje spojeného s mnoha významnými osobnostmi lidských dějin.“

Poznatky z teorie grafů může vyučující matematiky poskytnout svým žákům v rámci rozšiřující výuky matematiky, tedy lze tímto tématem zajímavě zpestřit výuku volitelných předmětů, seminářů z matematiky, které řada středních škol nabízí v posledních dvou ročnících studia.

Dále je možné problémy z teorie grafů využít jako náměty pro skupinovou či samostatnou práci žáků na projektech. Zde se přímo nabízí spojení s informatikou, neboť lze řešení řady úloh z této oblasti hledat pomocí různých algoritmů, které studenti mohou jak samostatně naprogramovat, tak i porovnávat vhodnost různých algoritmů na řešení konkrétních úloh. Mohou tak prakticky experimentovat s náročností jednotlivých postupů.

Alespoň některé z aspektů, které jsem nyní naznačili obecně, ilustrujme na jednom konkrétním problému z teorie grafů, a to problému čtyř barev.

2 Problém čtyř barev

Problém čtyř barev je zajímavý především tím, že jeho formulaci pochopí i člověk, který není matematikem, neboť jej lze snadno popsat bez použití matematického aparátu. Otázka, jaký je nejmenší počet různých barev potřebný k obarvení tzv. politické mapy, je srozumitelná pro každého, kdo někdy, např. v hodinách zeměpisu, pracoval s atlasem. Matematika se zde potkává s geografií, konkrétně s kartografií, což představuje zajímavé propojení dvou různých vyučovacích předmětů, matematiky a zeměpisu.

Ve srovnání s jednoduchostí formulace problému pak o to více překvapí doba, po kterou se řada význačných matematiků neúspěšně pokoušela nalézt správný důkaz tzv. věty o čtyřech barvách. Důkaz si vyžádal více než sto let usilovné práce. Zajímavostí je i skutečnost, že nalezený důkaz využívá práci počítače. Proto jej v roce 1976, kdy byl prvně publikován, odmítala řada matematiků akceptovat. Jednalo se totiž o úplně první využití počítačů v rámci důkazu matematické věty.

3 Historicky první formulace problému

Zatímco sám problém čtyř barev je dosti známý, jeho autor zdaleka tak slavný není. Jako první si otázku, zda lze země, případně kraje či okresy v tzv. politické mapě vždy obarvit pomocí maximálně čtyř barev tak, aby sousední oblasti nebyly obarveny stejnou barvou, položil jistý Francis Guthrie (1831–1899). Tento anglický právník a matematik si v roce 1852 při vybarvování mapy Anglie všiml, že si vystačí pouze se čtyřmi barvami. Provedl další pokusy, ale vždy mu stačily nejvýše čtyři barvy. Francisův bratr Frederick (1833–1886), v té době student matematiky na University College v Londýně, představil jejich pozorování dne 23. října 1852 svému učiteli matematiky, Augustu de Morganovi (1806–1871). De Morgana problém fascinoval a ještě tentýž den napsal dopis siru Williamu Rowanu Hamiltonovi (1805–1865). Hamiltona ale popsaný problém nezaujal, o čtyři dny později odepsal, že se jeho řešením zabývat nehodlá. Augustus de Morgan, známý především svými pracemi v oblasti analýzy a logiky, ale domněnku o čtyřech barvách, matematickou hypotézu svých studentů, šířil dál.

Hned v počátcích řešení problému čtyř barev vznikla teze, že kartografům musela být otázka známa již dříve z jejich praxe. Nelze však najít žádné prameny o dřívějším řešení tohoto problému profesními kartografy. Důvod je prostý. Pro kartografii není omezení na pouhé čtyři barvy nutné, tvůrci map prostě minimalizaci počtu použitých barev jednoduše neřešili. Pro kartografy je podstatnější přehlednost a názornost vytvářených map, proto se kartograf v počtu použitých barev nijak neomezuje. Současní kartografové zmiňují sice větu o čtyřech barvách ve svých přednáškách, ale spíše jen pro zpestření výkladu.

4 Matematická formulace problému

Obecná otázka, jaký je minimální počet barev potřebných k obarvení mapy tak, aby oblasti se společnou hraniční linií nebyly obarveny stejnou barvou, vyžaduje jako matematický problém samozřejmě přesnější formulaci. První omezení se týká požadavku na jednotlivé oblasti. Musí se jednat o souvislé oblasti, které jsou ohraničeny topologickou kružnicí. Z našich úvah tak vypadnou země tvořené ostrovy (např. Velká Británie, Dánsko) nebo nesouvislé státy (např. Rusko). Dále za sousední uvažujeme pouze oblasti, které mají společnou hranici tvořenou linií, nikoliv pouze izolovaným bodem či několika izolovanými body.

Příkladem mapy obarvené čtyřmi barvami je mapa krajů České republiky. Při pohledu na obarvení vnějších sousedů Středočeského kraje je zřejmé, že méně než čtyřmi barvami tuto mapu obarvit nelze.

Obr. 1: Mapa krajů ČR vybarvená pomocí čtyř barev

Problém barvení mapy je formulován geometricky, lze jej ale převést na problém ryze kombinatorický, a to na problém barvení grafu. Samotnou mapu území, kterou chceme obarvit, můžeme chápat jako rovinný graf. Jeho vrcholy jsou v bodech, kde se setkávají hranice alespoň tří oblastí. Hrany rovinného grafu pak tvoří právě hranice, neboli oblouky mezi jednotlivými vrcholy. My se zajímáme o barvení oblastí tohoto rovinného grafu. Vytvořením příslušného duálního grafu převedeme problém na obarvení jeho vrcholů.

Pokusme se popsat vytváření duálního grafu. Uvnitř každé oblasti mapy (stěny původního grafu) zvolíme bod, tím získáme vrcholy duálního grafu. Každé hraniční linii mapy (hraně původního grafu) pak v duálním grafu odpovídá hrana, která spojuje vrcholy příslušné k oblastem, které tato hraniční linie oddělovala.

Konstrukce duálního grafu je definována pouze pro grafy rovinné a vždy je vázána na jedno pevné nakreslení původního grafu. Dále je zřejmé, že v duálním grafu se mohou objevovat i násobné hrany a smyčky, u duálu se obecně jedná

o tzv. multigraf. Intuitivně nahlédneme, že duální graf rovinného grafu musí být také rovinný.

Otázka na minimální počet barev potřebných k obarvení mapy se takto převede na otázku minimálního počtu barev pro dobré vrcholové obarvení rovinného grafu. Vrcholovým obarvením grafu pomocí k barev se rozumí zobrazení, které každému vrcholu grafu přiřazuje jednu z k barev. O dobrém vrcholovém obarvení hovoříme, pokud nejsou žádné dva sousední vrcholy obarveny stejnou barvou. Nejmenší číslo k takové, že existuje dobré obarvení grafu pomocí k barev, se nazývá chromatickým číslem grafu.

Problém barvení mapy jsme tedy převedli na problém určení chromatického čísla rovinného grafu. Samotný problém čtyř barev má v teorii grafů následující formulaci: Je chromatické číslo libovolného rovinného grafu menší nebo rovno čtyřem?

Přesné formulace uvedených definic i další teoretické poznatky související jak s problémem čtyř barev, tak i s barvením grafů obecně lze nalézt v [5, str. 186–195] a [3, str. 139–193].

5 Neúspěšné pokusy o důkaz

Vraťme se nyní stručně k historii řešení problému čtyř barev. I zde lze najít řadu zajímavostí, které mohou studenty zaujmout a zároveň je seznámit s náročností, ale i krásou matematiky. Historie spojená s dokazováním věty o čtyřech barvách je podrobně zpracována v [2, str. 7–44], odkud vycházíme v následujícím textu.

Po prvních neúspěšných pokusech o důkaz hypotézy o čtyřech barvách, spojených především se jménem Augusta de Morgana, zájem o problém po roce 1860 upadal. Další vlnu zájmu rozpoutal Arthur Cayley (1821–1895) v roce 1878, a to svým dotazem na Matematickou sekci londýnské Royal Society, zda již bylo předloženo řešení hypotézy, a následným zveřejněním důkladní analýzy problému o čtyřech barvách.

O rok později publikoval svůj důkaz Alfred Bray Kempe (1849–1922), právník, ne matematik, který ale jako student na Trinity College v Cambridge navštěvoval také Cayleyho matematické přednášky. V roce 1880 byl ještě Kempeho důkaz vylepšen dvojicí matematiků působících na Johns Hopkins University v Baltimore, byli to William Edward Story (1850–1930) a Charles Santiago Sanders Peirce (1839–1914). Problém byl považován za vyřešený, aby se později ukázalo, že tomu tak není.

Věta o čtyřech barvách byla považována za dokázanou až do roku 1890, kdy Percy John Heawood (1861–1955) poukázal na chybné závěry v Kempeho důkazu. Ukázal, že Kempe takto dokazuje nikoliv větu o čtyřech barvách, ale pouze větu o pěti barvách. Dva možné důkazy věty o pěti barvách lze nalézt např. v [5, str. 190–193]. Sám Heawood litoval faktu, že jen nalezl chybu v dosud známém důkazu, ale nedokázal podat nový důkaz. Problému čtyř barev se věnoval po zbytek života, publikoval o něm dalších šest prací, poslední v roce

1949 ve věku 88 let. Heawood tak zůstává ústřední postavou v historii problému čtyř barev, i když konečný důkaz z jeho úvah mnoho nevyužívá.

Ve své práci Heawood nadnesl nový problém, otázku minimálního počtu barev pro dobré obarvení mapy umístěné i na jiné uzavřené ploše, než je kruhová sféra. Úlohu hledání horní meze pro tzv. Heawoodův problém barvení map lze překvapivě řešit snáze než samotný problém čtyř barev, velkého pokroku v této oblasti bylo dosaženo již v 60. letech 20. století.

Vraťme se ale ke klasickému problému čtyř barev. Po odhalení chyb v důkazu pomocí Kempeho řetězců byl tento problém hodně diskutován. Sám Heawood zveřejnil v roce 1897 práci, v níž se pokoušel využít při řešení metody z elementární teorie čísel. Na tyto myšlenky navázal Oswald Veblen (1880–1960), když při přednášce v dubnu 1912 popsal problém ve tvaru lineárních rovnic nad konečným tělesem. Rozhodujícím pro konečné řešení byla práce Veblenova mladšího kolegy Georga Davida Birkhoffa (1884–1944). Navázal na Veblenovu práci, ale současně se vrátil i ke Kempeho postupům. Právě Birkhoff jako první zavedl pojem redukovatelných řetězců, který byl pro další zkoumání problému o čtyřech barvách klíčový.

6 Důkaz věty o čtyřech barvách s pomocí počítačů

Na Birkhoffa navázali někteří další američtí matematici, ale pokroky při řešení problému byly jen nepatrné. Zásadní přínos ke konečnému vyřešení problému čtyř barev se podařil až na konci 60. let 20. stol. německému matematikovi Heinrichu Heeschovi (1906–1995). Heesch systemizoval důkazy reducibility, vynalezl D-reducibilitu, pro jejíž důkaz vyvinul vlastní algoritmus, a vymyslel konstrukci tzv. nevyhnutelné množiny konfigurací při použití metody přemisťování nábojů, známé především pod anglickým názvem *discharging*. Společně s Karlem Paulem Dürrem (1937–2008), který se postaral o vlastní programování, dokázali přenést algoritmus do počítače. První výpočty kolem reducibility proběhly v listopadu a prosinci 1965 ve výpočetním centru Technické vysoké školy v Hannoveru, vše ale bylo omezeno malou kapacitou paměti.

Oba němečtí matematici byli následně pozváni na dva delší pobyty do Brookhaven National Laboratory v Uptonu (New York), kde mohli pracovat se značnými výpočetními časy na místním silnějším počítači. Heesch nevyužil nabídku na trvalý pobyt v USA a rozhodl se vrátit zpět do Hannoveru, neboť věřil, že zvládne důkaz dokončit sám. Bohužel ale v Německu nedostal žádné finanční prostředky potřebné jak na úhradu velkých výpočetních časů, tak na osobní náklady.

Další práce na dokončení důkazu již probíhaly pouze na americké půdě. Wolfgang Haken (1928–2022), vedoucí katedry aplikované matematiky v Brookhaven, a Kenneth Appel (1932–2023) společně od roku 1971 začali s intenzivní prací v této oblasti. Vsadili na razantní pokrok v oblasti počítačů, svou práci zaměřili především na rozvoj nových silných technik v metodách využívajících

discharging. V prosinci 1975 vymyslel Haken novou proceduru, transversální vybíjení, kterou ovšem nešlo jednoduše přesunout na počítač, takže část práce se opět vrátila k ručnímu ověřování. Kombinací ručního ověřování a práce počítače se podařil již v roce 1976 konečný důkaz věty o čtyřech barvách. Haken a Appel po teoretickém rozboru a redukci problému na konečnou množinu konfigurací vrcholů využili počítač pro vyšetření 1 936 různých konfigurací, samotný výpočet zabral cca 1 200 hodin strojového času. Později byl sice počet konfigurací zredukován na 1 476, ale i tak zůstalo použití počítačů v důkazu nutností.

Právě zapojení výpočetní techniky do důkazu vyvolalo řadu kritických reakcí. V roce 1986 pak Appel a Haken publikovali stručný přehled, jak jejich důkaz funguje, a v roce 1989 nové vydání svého důkazu (na 741 stránkách textu).

V roce 1995 pak skupina amerických matematiků Neil Robertson (1938), Daniel P. Sanders (?), Paul D.Seymour (1950) a Robin Thomas (1962–2020) zveřejnila manuskript *The four-colour theorem* obsahující podstatně kratší a jednodušší důkaz, který se v zásadě odvolává na stejné myšlenky a také se neobejde bez využití počítače, je ale snáze pochopitelný.

Přesto ani dnes řada matematiků nepovažuje řešení problému čtyř barev za konečné. I nadále se mnozí snaží o důkaz bez využití počítače a neustále vyvstává v souvislosti s tím řada nových otázek.

7 Závěr

Problematika barvení grafů se netýká pouze problému čtyř barev. Jedná se o veliký okruh problémů, které mají řadu praktických aplikací. To nabízí možné využití v případné projektové výuce na gymnáziu či na odborné střední škole. Je možné seznámit studenty s dalšími druhy barvení grafů, řada zajímavých aplikací je uvedena v textu [3, str. 139–164]. Dále je možné porovnávat různé heuristické algoritmy pro barvení grafů, které lze najít například v knize [4, str. 226–233], přičemž studenti mohou sami vytvářet a ladit příslušné programy.

Literatura

[1] *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia,* MŠMT, Výzkumný ústav pedagogický, Praha, 2007

[2] R. Fritsch, G. Fritsch: *Der Vierfarbensatz, Geschichte, topologische Grundlagen und Beweisidee,* BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994

[3] P. Kovář: *Teorie grafů - rozšířená verze skript,* dostupné na internetu, Vysoká škola báňská, Technická univerzita, Ostrava, 2024

[4] L. Kučera: *Kombinatorické algoritmy,* SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha, 1989

[5] J. Matoušek, J. Nešetřil: *Kapitoly z diskrétní matematiky,* Univerzita Karlova v Praze, Praha, 2000